

# 第一章

## 一、钢琴的诞生：

钢琴——著称当今的“乐器之王”。

没有哪种乐器能够像钢琴那样有着如此宽广的音域：从大字二组 A，到小字五组 c，一台钢琴的音域可与一支管弦乐队相媲美；没有哪种乐器能够像钢琴那样有着如此繁复精妙的传动结构，把物理学中力学、声学的理论“诠释”到了无可挑剔的程度。

### 钢琴的发展史

与一切事物的发生发展规律一样，被当今世人所公认、推崇的钢琴，其优势地位并不是与生俱来的。都是人类对其不断进行改良的结果。钢琴的演进过程要从钢琴的前身——古钢琴和羽管键琴（也称拨弦古钢琴）说起。

据资料记载，钢琴的发展大致经历了两个时期，即古钢琴时期（古钢琴、羽管键琴）和现代钢琴时期。：

从钢琴的诞生说起，有很多乐器我们都不知道它们产生的年代，更不知道是谁发明的，而钢琴则是一个例外。<sup>1</sup>历史文献告诉我们，一说是 1700 年，也有另一说是 1709 年，无论哪一年更为确切，对于我们今天来说，钢琴的出现都是人类音乐历史上的一个重要里程碑。其实在此之前（基本上是 14 世纪和 15 世纪），欧洲音乐生活中已经有了不少样式的键盘乐器，诸如：小型单键盘羽管键琴“斯皮耐”（Spinet）、德西马琴（Dulcimer），“维吉诺”羽管键琴（Virginal）、楔槌键琴（Clavichord）、羽管键琴（Harpsichord）等。它们的琴体内部都装有音板和许多绷紧的琴弦配合简单的机械。不同的是钢琴用琴槌击弦发音，古钢琴琴键的尾端有一个金属平头钉，用以击弦发出声音；羽管键琴则是通过装置在琴键后端的羽毛（据说是乌鸦的羽毛）或有弹性的簧片制成的拨子拨动琴弦发音。这两种乐器所发出的声音都比较轻弱、短促，弹奏时谈不上力度变化，几乎不能改变音量，因而缺乏音乐表现力。尽管如此，古钢琴仍然是乐队中不可或缺的重要角色，特别是在巴洛克时期，拨弦古钢琴尤受重用，在室内乐中其地位无可替代。随着键盘音乐在 16 世纪和 17 世纪占有了重要的地位，更精致的击弦古钢琴和羽管键琴成为了主要的键盘乐器。

可是，音乐在发展，音乐家乐思的翱翔需要更为广阔的空间，音量弱小的拨弦古钢琴已不能满足当时音乐家们的需要。于是，到了 18 世纪，轻重可以随意变化、更具表现力的击弦式钢琴开始出现，逐渐取代了古钢琴及羽管键琴。而制造钢琴的灵感则来自于击弦古钢琴的动作机制和羽管键琴厚实的音流，利用这样的原理，1698 年，意大利这个欧洲艺术的重镇，有一位乐器制造家开始发明制造了钢琴，他就是

<sup>1</sup> 洛秦《钢琴的故事》上海音乐学院出版社（2004 年 4 月第一版），第 14 页



佛罗伦萨的巴托洛缪·克利斯托福里 (Bartolomeo Cristofori, 1655~1731)<sup>2</sup>，他以拨弦古钢琴为原形，乐器外表和佛罗伦萨教堂的羽管键琴几乎一模一样，采用了以弦槌击弦发音的机械装置，演奏者通过触动来控制琴弦上方的一排小锤，代替了过去拨弦古钢琴用羽管通过持续的力量拨动琴弦发音的机械装置，从而克利斯托福里发明的这种琴使琴声更富有表现力，音响层次更丰富，并能通过手指触键来直接控制声音的变化。1709年，他又进一步改革了原来击弦机的结构，使击弦速度比原来加快了10倍，而且可以快速连续弹奏，音域也增加为4个八度组，可以说这就是现代钢琴的雏形，这标志着第一架钢琴的出现，它被称之为“*gravicembalo col piano e forte*” (*gravicembalo* 是15世纪羽管键琴的鼻祖)，意即“能发出弱音和强音的羽管键琴”。这个长长的名字后来缩减为“*pianoforte*”，钢琴可以演奏“弱强”的特色成为其称谓。一直过了大约有一个世纪，才完全简化为今天的钢琴 (piano)。1730年，德国乐器制造家格特弗利德·希尔伯曼 (Gottfried Silbermann, 1683~1753) 又采用了克利斯托福里的构思对这种新乐器作了进一步的改进，1730年制造出德国的第一架钢琴，音域扩展为5个八度。他曾听取巴赫的建议后，于1747年又加以革新，他又对钢琴制音器的改良，这也是他对钢琴改革的主要贡献，他利用一种手动装置使全部制音器能够离开琴弦，使钢琴的余韵效果更丰富（对于我们今天的演奏家来说，很难想象延音踏板在当时是手来控制的）。1783年，也就是在第一架钢琴诞生八十三年后，英国人布罗德伍德 (Broadwood) 发明了踏板而获得了专利权。

随着音乐由巴洛克风格向古典主义演变，声音弱小、缺乏变化的拨弦古钢琴逐渐被音域宽广、音响洪亮的钢琴所代替。至19世纪，钢琴最终登上“乐器之王”的宝座！

从韩宝强先生的著作《音的历程》中总结钢琴的演进过程：乐器的改良无外乎总是朝着两个方面发展，其一，在音响性能上追求更宽广的音域和更丰富的音色、音量变化；其二，在操作性能上追求更合理、更方便的演奏方式。此外，还应有律制与艺术文化审美观念的因素在内。

## 二、钢琴的传入

首先是键盘乐器在中国的出现，是通过“丝绸之路”东西方经济文化交流发展的结果，<sup>3</sup>据文献记载是从明代 (1368—1644) 开始的，特别是清朝 (1616—1911) 末年，鸦片战争 (1840) 后的近代，迅速繁荣起来的远洋海道给中国“舶”来了“西方资本主义文明”，运来了西方进口货，统称“舶来品”，键盘乐器就是“舶来品”之一。在明末清初时期，随着西方传教士的纷纷东来，曾经有极少量的欧洲古钢琴被“舶”来中国，但当时唯一有文字记载为证的是1601年意大利的传教士利玛窦 (1552—1610) 在北京献给中国皇帝明神宗的一架古钢琴。中国早期对古钢琴的译名也不统一，如有：“西琴”、“番琴”、“雅琴”、“洋琴”及“铁丝琴”等名。当时唯

2 (美) Patricia Fallows-Hammond 编注《钢琴艺术三百年》西南师范大学出版社 (1998年6月第一版)

3 卞萌《中国钢琴文化之形成与发展》华乐出版社 (1996年8月第一版)，第5页

一能叫得出名字的学弹古钢琴的中国人是清朝的康熙皇帝（1662—1712），他学弹这架“西洋铁丝琴”也仅是一时兴致所致，自娱而已。直至19世纪上半叶，西欧的钢琴音乐已经进入了浪漫主义黄金时代时，中国方始传入欧洲的现代钢琴。

### 三、钢琴的律制

#### （一）钢琴律制的发明

在这里值得一提的是，钢琴虽然作为西洋乐器传入中国，但它的律制——十二平均律，却是我国明代的乐律学家、历数学家朱载堉<sup>4</sup>（1536—1611）首先发明的，他是世界上第一个用科学理论创立“十二平均律”的人，也是世界科学史上的一大发明，是中国律学史上一项重大的贡献，他的理论是音乐学和音乐物理学的一大革命，在世界乐律学研究上具有划时代的意义。

<sup>4</sup>朱载堉在四百多年前发明、发现、创造了六个世界第一：即

第一个提出十二平均律的理论原理——早于欧洲；

第一个创造出十二平均律的理论原理发音的乐器——弦准；

第一个发现“异径管律”<sup>⑤</sup>的规律——以管定律；

第一个在算盘上进行开方计算；

第一个得出求解等比数列的方法；

第一个创立“舞学”一词，并为这一学科规定了内容大纲。

<sup>5</sup>在他所著《乐律全书》<sup>②</sup>中，有《律历融通》（1581年发表）、《律学新说》（1584年发表）、《律吕精义》（1596年发表）等多种音乐论著，他的十二平均律的理论，最初发表在他的早期著作《律历融通》（1581年作序）中，称十二平均律为“新法密率”，可见朱载堉发明的十二平均律，是在1581年之前。朱载堉的发明，在国际上具有很高的科学价值，也反映了我国明代在世界律学领域中所具有的领先地位。他是我国历史上一颗灿烂的科学、艺术巨星，他的科学成就和艺术理论传入欧洲，引起了世界学术界的轰动，对世界科学文化有着卓越的贡献，被誉为“东方文艺复兴式的圣人”，无愧为“世界历史文化名人”。但遗憾的是其科研成果，却被明、清两代的统治者所埋没，未能见诸实行。

欧洲十二平均律的运用：

<sup>4</sup> 李来璋《中国古代音乐史概述》吉林艺术学院成人教育中心教务处（1996年9月），第160页

<sup>5</sup> 缪天瑞《律学》人民音乐出版社（1996年第三次修订版），第151页

<sup>6</sup> 巴赫 J.S. (Johann Sebastian Bach, 1685——1750) 德国作曲家兼管风琴演奏家，于1722—1742作有《十二平均律钢琴曲集》二卷，每卷都有系统地依次用十二个大调和十二个小调，写出“前奏曲”(prelude)和“赋格曲”(fuge)这两卷曲集可以说是充分发挥了十二平均律的自由转调的典范作品。当时他是为他的小孩练习而作的（供古钢琴或羽管键琴用）。这时开始提倡了十二平均律。当时钢琴已开始流行（钢琴约创制于1709年），十二平均律逐渐趋向稳定。

基恩伯格 (J.P. Krinberger 1721——1783) 是巴赫晚年的弟子，巴赫曾教导他把所有的大三度音程都调得比纯律较高，他于1779年提出一种不规则律。研究家们认为巴赫的二卷48首《十二平均律钢琴曲集》并非全用十二平均律，而是用多种律制写成的：既有十二平均律，又用韦克迈斯特的不规则律等。基恩伯格与现在我们看到的巴赫的作品有密不可分的联系，他是历史上最著名的一位巴赫音乐的整理和普及者，同时也是一位巴赫之后的著名音乐理论家。

德国音乐理论家兼作曲家马普格 (Friedrich Wilhelm Marpurg, 1718——1795) 在1751年提出十二平均律，于1756年发出具有远见的论断，认为只实行一种律制，即十二平均律，以便于统一。事实果然如此，时至19世纪，十二平均律已成为键盘乐器标准的调音法，成为一种典范律制广泛流传。

19世纪末 (1890年)，比利时音响学家马容曾按朱载堉发明的这种方法进行实验，得出的结论与朱载堉完全相同。所以，朱载堉提出的数据，与今日的十二平均律完全相同，计算之精确，令人惊叹，这使西方的一些音乐理论家也叹为观止。

至20世纪，随着钢琴的进一步普及，由十二平均律演奏的旋律与和声已逐渐被人们所接受并认可，趋向稳定。

由此看出，朱载堉对平均律精确数据的提出是早于欧洲，并通过一定方式、渠道在世界广泛传播。

## (二) 钢琴律制发明的考证

针对学术界三十多年来争论的一些论点，诸如（1）：十二平均律的发现者的荣誉究竟应归于中国的朱载堉，还是荷兰数学工程师斯特芬？（2）欧洲人是否知道朱载堉的十二平均律的数据，这个数据是否曾经传到欧洲？

<sup>7</sup> 对此论点已在最新材料中证实：2005年1月14日《北京周报》第四版的“国际新闻”上公开声明，即“2004年岁末，从海外传来一个可喜的消息：美华裔学者卓仁祥教授因对朱载堉研究的贡献，荣获‘2004国际音乐家奖’”（由蔡良玉综合编写自《世界日报》、《达拉斯时报》）。

卓仁祥教授用了十年时间查阅和访问了中国国内、香港诸多大学档案和人士，以

6 缪天瑞《律学》人民音乐出版社（1996年第三次修订版），第200页  
7 《北京周报》第四版“国际新闻” 2005年1月14日

及美国哈佛燕京图书馆、旧金山的利玛窦中心等，进行考证和研究，又用六年时间写作于2003年出版了这本专著——《音乐平均律于十六世纪在中国及欧洲的发现》，提供了确凿的证据以解决三十余年来的争论。

卓仁祥教授的《音乐平均律于十六世纪在中国及欧洲的发现》，不仅充分肯定了朱载堉在历史和数学上的贡献，而且指出斯特芬著作中数学公式上的错误（见卓仁祥著作详解），从而有力地否定了后者在十二平均律探索史中的地位。

卓教授在书中还提供了文件证据，证明利玛窦对朱载堉的历学和为十二平均律计算的数学著述相当熟悉，而朱载堉在其《律历融通》一书中，讨论了历与律这两个不可分隔的方面。在此基础上，卓教授指出在法国数学乐理家默森(Marin Mersenne)的《和谐宇宙》(Harmonie Universelle 1636)一书在出现的数字 1.059463 确实是朱载堉在其著述中，用开十二次方计算出来的数目，而后被利玛窦或他的耶稣会神父带到 Jesuit Rector 修道院，直接或间接（通过斯特芬）传给默森。

卓教授对问题的全方位的把握，他将历史、文化和科学等各个相关学科交织在一起，通过一丝不苟的说明和解释，指出在古代中国如同欧洲的中世纪一样，数学、乐学和占星术都与合一的宇宙哲学观有着内在的联系，而对平均律的探求决非仅仅是个音乐的问题。卓教授正是用这样的历史态度来研究平均律问题，以证明朱载堉的学术精神真谛和全部意义，从而确认朱载堉在人类文化历史中的公正地位。

因此，迄今为止又具有说服力的证实了朱载堉是世界上第一个完美地完成了十二平均律计算的人。肯定了朱载堉对世界科学文化的贡献和科学价值。

### （三）钢琴的律制

朱载堉提出的十二平均律“新法密率”理论，就是目前世界通用的把一个八度分成振动数比相等的十二个半音，即十二平均律。用开方的方法计算律的长度，使十二律间的音程达到严格的均匀性，这就是他的有别于三分损益法的“新法”；他用 81 档的大算盘，通过两次开平方，一次开立方的律学计算，求得了相邻两律间的长度比例，即“密率”，实际上求得了项数为 12 的等比数列的公比，具体说来就是：用发音体的长度计算音高，假定黄钟正律为 1 尺，求出低八度的音高弦长为 2 尺，然后将 2 开 12 次方得频率公比数 1.059463094，（约等于 1.0595。这就是十二平均律半音的频率比。）该公比自乘 12 次即得十二律中各律音高，且黄钟正好还原。用这种方法第一次解决了十二律自由旋宫转调的千古难题，他的“新法密律”（即十二平均律）已成为人类科学史上最重要的发现之一。（关于十二平均律的计算，缪天瑞先生在《律学》一书中有清楚的说明）。要注意的是：不能以为，把一条弦或一根管均分为十二段，或者使十二律各相邻律之间的频率的差数都相等，就能构成十二平均律。十二平均律是各相邻律（即半音）之间其“频率比”都均等的一种律制。因此亦称十二等比律或“匀律”（吴南薰《律学会通》）。

朱载堉“新法密率”的提出，彻底解决了我国律学史上三分损益法造成的“黄钟不能还原”及多种律制无法解决的千古难题，把三分损益法由五律增加到十二律，使调式的范围扩大，可以在十二律上进行“旋宫”，形成在各种高度的调式上进行转调。钢琴键盘上共有黑、白键 88 个，就是根据十二平均律的原理制作的，这就适用于在钢琴的 88 个琴键上运用十二个律应付一切的变化。所以，十二平均律一举解决了五度相生律和纯律本身存在的矛盾以及两种律制之间存在的矛盾，也就解决了五

度相生律和纯律一味增加律数而不能回到出发律的矛盾。

但是十二平均律也有它的缺点，例如，它影响音程的和谐性，又使音程的协和与不协和的范畴混淆不清，等等。关于这些问题，下面会加以说明进行研究。

#### 四、钢琴音准的确立

音乐是国际性语言，钢琴是国际性通用乐器。因此钢琴除了造型等审美因素外，都必须是国际性标准，音准更是如此。钢琴音高的确定从属于音乐体系。在不同时代和不同地区有所不同，在欧洲，音的标准高度，从17世纪起，总的趋向是逐渐升高。17世纪的“古典高度”仅为 $a'=415\sim430\text{Hz}/\text{周秒}$ 。1740年时期音乐家所使用的音高标准仅为 $a'=416\text{Hz}/\text{周秒}$ 。18世纪初，海顿、莫扎特等大音乐家们使用 $a'=422\text{Hz}/\text{周秒}$ 。到19世纪，德国斯图加特物理学家会议决定 $a'=440\text{Hz}/\text{周秒}$ 。

##### 绝对音高

据文献，1834年德国声学大会确立了 $a'=440\text{Hz}/\text{周秒}$ 的第一国际高度。1859年德国会议又确立 $a'=435\text{Hz}/\text{周秒}$ 为国际高度。现多数情况下音乐家们更喜欢用 $a'=440\text{Hz}/\text{周秒}$ 为标准，故称其为“音乐会标准”及“第一国际高度”。近年不少交响乐团喜欢用 $a'=443\text{Hz}/\text{周秒}$ 为标准。目的是为了更加铿锵的音乐效果。这种以从“古典高度”到“音乐会高度”的变化不仅反映了人们对音响色彩的变化趋向，更反映出乐器制造工业的发展，对音乐的影响。钢琴的琴弦，从“铜丝”到“钢丝”的演进同“音准高度”的变化是同步的。当时1709年钢琴的琴弦是铜丝制成，虽然击弦机构已改进为较完善的现代结构，但其张弦系统的木架结构，钢铁材料制成的琴弦，不可能承受较强的张力，就会减低弦的振动频率，从而使音高、音量、音色均不可能达到理想程度，直接影响到音准，音域也仅为五组（与现在的风琴近似），而到1852年张弦系统改为铸铁支架，为音域的扩展及张力的增加提供了可能。于是1834年琴钢丝问世，我们今天所听到的现代钢琴音响原型才真正诞生，因此我们可以说钢琴标准音高的确立是在人类音乐审美需求的动力下，不断改变，不断完善的过程。今日世人公认的 $a'=440\text{Hz}/\text{周秒}$ 为国际标准。未来 $a'=443\text{Hz}/\text{周秒}$ 是否会成为国际标准？因为这就不仅是乐器制造的技术问题了，若 $443\text{Hz}/\text{周秒}$ 成为标准，以帕瓦罗蒂、多明哥、卡雷拉斯为代表的当代男高声能否唱到 $c''$ 将成为问题。

##### 相对音高

钢琴音高的确立，仅有 $a'=440\text{Hz}$ 是不够的，因为这仅确立了绝对音高，其相对音高即音程关系还需调律师来确立。而相对音高确立的依据是律学理论。

大家知道，多数弦乐器制定相对音高均采用“五度相生律”和“纯律”的法则，例如小提琴的 $g-d-a'-e'$ ，按此法定出的五度关系是完全和谐的。但若我们以这个原则将 $a'$ 弦减去一个纯律大二度构成 $g'$ 时，其音高应为 $g$ 的高八度音，但其频率却相比 $g'$ 高出了 $2.46\text{Hz}/\text{周秒}$ ，因此钢琴调律遵循的十二平均律制中 $g-d$ 五度的音程关系，就需缩小2音分（以五度相生律700音分的纯五度为参照），而四度音程就需扩大2音分，对调律师来说四、五度音程成为“不谐和”音程，钢琴调律师的难，大约就难在把握这“不和谐”的程度。而一个高明的调律师正是他能精确地把握住“不和谐”的程度，并把这“不和谐”的程度计算出来，以其作为标尺来测量每个音的高

低。因此对于一个调律师而言，音准不仅是一种音高的感觉。音准是以听觉来计量的数据。这与钢琴的律制有关。（在相对音准的听觉上，与通过数字计算的音高相比，听觉上的感觉听上去的高音会相对更高些，低音会相对更低些。）

而对相对性音准感的测试工作来说，存在判别音准标准多样化问题，例如：对于一个具有强烈的五度相生律音准感的受试者来说，以十二平均律和纯律为主体构成的音乐样本中，许多音程都是不准的，反而亦然。

所以相对性音准感，存在难研究因素，其相关研究是<sup>8</sup>“音准宽容度”，即音乐欣赏者或音乐表演者对演奏、演唱音乐过程中音准偏离的容忍程度。韩宝强先生在1988年对145位音乐家的音准宽容度测量后得出如下结果：一，多数音乐家的和声性音准感具有-38至+14音分的宽容度。意味着对于多声部音乐来说，音准偏低些更不容易被人察觉。二，与其他音乐专业相比，指挥家的音准宽容度相对比较窄一些，意味着指挥对音准的要求是比较“苛刻”的。

从上述结果可看出，在音准判断上，人的主观听觉不像测音仪器那样恒定、精确，存在一个宽容度区间，但也不是没有界限。

对人耳音准感的研究，有助于人们对音乐实践中律制应用问题的认识。律学是专门研究音乐中的音高规范的理论。律学问题，从音乐实践的角度看，包括音准问题在内，即如何采用一种合理而有规律的方法，让音乐听起来比较“准”。所谓“准”与“不准”，归根是以大多数人们的主观听觉为基础。律学研究的基点实际上是建立在人耳音高感的生理和心理感知基础之上。

## 五、钢琴的声学原理与律学

音律是音乐艺术的根本，无论是作曲者，还是演唱、演奏者，懂得音律，必有利于能力的发挥；而从事音乐研究的人具有一定的音律学知识，可使研究更细致、更深刻；即使是音乐爱好者，具有音律学知识，对于音乐作品的理解深度与欣赏能力的提高，必有明显的帮助。尽管这个道理是人人皆知的，但是多数人对于音律学都不愿意接触，认定音律学乃是一种艰深的学问。这一认识尽管有其历史根源，却未必正确。

### （一）关于律学

我国涉及律学的著作如《管子》、《吕氏春秋》、《淮南子》、“二十五史”……虽然不能说汗牛充栋，却可认定为在世界各国中绝无仅有的。关于音乐的音高与音程的关系，已成为一门专门的学问，称为“律学”。目前，世界各国存在着好几种律制，但最常用的有三种，即十二平均律、五度相生律、纯律。律制不同，音程关系也有很大的不同。

---

<sup>8</sup> 韩宝强《音的历程》中国文联出版社（2003年5月第一版），第38页

**三分损益律：**是中国音律史上最早产生的完备的律学理论，被称为“音律学之祖”。大约在春秋中期出现。推出十二律的还有希腊数学鼻祖毕达哥拉斯五度相生律，它是以弦长来计算的，其实与中国的三分益损律本质上是一种律制，所以也叫“五度相生律”。

<sup>9</sup>《管子·地员篇》、《吕氏春秋·音律篇》分别记述了三分损益律的基本法则：首先求得一个标准音“黄钟”，把它作为“宫”音，然后可就宫音的弦长增加三分之一（三分益一），即得低四度的“徵”音；再就徵音的弦长减去三分之一（三分损一），即得高五度的“商”音，如此推算，可求得12个音，称为“十二律”，每律有固定的律名。“三分损益法”计算到最后一律时不能循环复生，是一种不平均的“十二律”，各律之间含有大、小半音之别。

**纯律：**是用纯五度（弦长之比为2:3）和大三度（弦长之比为4:5）确定音阶中各音高度的一种律制。例如：大七度为纯五度加大三度，小三度为纯五度减去大三度，由于纯律音阶中各音对主音的音程关系与纯音程完全相符且其音响亦特别协和，故称“纯律”。

**十二平均律：**目前世界上通用的把一组音（八度）分成十二个半音音程的律制，各相邻两律之间的振动数之比完全相等。据杨荫浏先生考证，从历史记载看我国在音乐实践中开始应用平均律，约在公元前二世纪，但精密完善的十二平均律理论的出现，则是1584年明代朱载堉《律学新说》问世之时。

三分损益律、纯律、十二平均律，在中国同时存在。因此，也就出现异律并用的情况。从理论形态，在历史上有先后之分，但在音乐实践中，三律的结构元素是早就同存共用的，早在南北朝、隋唐、五代，都存在三律并用，如我国出土的埙、编钟等古代定音乐器的音律；还有现存的许多民间乐种中，也有琴、笙、琵琶、阮等乐器的合奏。音律审美形成由单一向综合发展的大体趋势，并不排除单一中的综合因素以及综合中的单一要求。因此，三律并用就成了中国传统音乐中存在的一个特点；发掘和探索三种律制在钢琴这一固定音乐器上的存在方式和特点（下一章内容将会详细讲述到钢琴三律蕴涵的存在方式），这也是我的论文导师李曙明教授对当代钢琴音响律学中的一大发现，也是当代研究钢琴音响律学的一个重大课题，我用李先生的理论基础对此课题进行进一步论证、分析和探讨推进这个重大课题的研究，使之具有深远的意义和影响。

**钢琴与律制**，就律制而言，尽管钢琴各条琴弦的调律都遵照十二平均律的标准，但就其轰鸣的实际音响而论，各弦所奏之实音与它弦所生之泛音，确有一定的音差。比如大调基音之上的纯律大三度泛音，与大调主和弦的十二平均律大三度实音，就有14音分的音差（400-386）。其中最为特殊的一例是：西洋古典音乐作品中，为回避小调主音之上的纯律大三度泛音和小调小三度三音实音的音律差异，常常在小调性的乐曲结束和弦中使用升高半音的“辟卡迪三度”（Tierce de picardie）。此种情形，在古典钢琴音乐作品之中，也常常见到。若非如此，细心耳审，就可以觉察其矛盾冲突。就此而言，匈牙利钢琴家约瑟夫·迦特《钢琴演奏技巧》一书“钢琴家赋予大

9 夏野《中国古代音乐史简编》上海音乐出版社（1989年2月第一版），第26页

调和小调和弦以纯律音准的前提是轻奏三度音”云云（北京，人民音乐出版社 1983 年 3 月第 1 版，第 6 页），虽然并不能改变其客观的音律差异，但就大三和弦而言，由于实音十二平均律三度的轻奏，纯律泛音三度的强度相对而言的确有所增加。因此，轻奏实音三度的确可以改善大三和弦的和谐与共鸣。但就小三和弦而言，则无论实音三度如何轻奏，实音十二平均律小三度和泛音纯律大三度之间的矛盾龌龊依然不能有任何实质的变化。

钢琴转调的方便无碍，与其矛盾冲突的音律制度，也是同一事物相互依存的两个方面。由于钢琴是根据十二平均律的原理制作的，所以它可在各种高度的调式上进行转调，这就适用于在钢琴的 88 个琴键上运用十二个律应付一切的变化。

钢琴的演奏技巧，着重于音调、力度的变化，着重于关系、比音的组合。其演奏手法的变化，基本上是在击弦范围之内的变化。虽然其变化的幅度难以尽言，但主要囿于触键所发之力度变化、触键所施之速度变化的范围。正如匈牙利钢琴家约瑟夫·迦特在其《钢琴演奏技巧》一书中所说：“弹奏一个音，我们所能改变的惟有它的强度。”

钢琴音响，正如其名“Piano-forte”（“轻-重”、“弱-强”）所示，在力度方面，有极大的变化范围。从窃窃私语、低吟浅唱到激昂慷慨、电闪雷鸣，钢琴之力度的变化，为其它任何单一乐器所不能企及。

钢琴之音响，虽然延长的幅度有限，但因制音器的发明，反而化腐朽为神奇，具备了“大珠小珠落玉盘”般晶莹剔透的颗粒性质。此制音器和延音踏板的综合功能，使得钢琴在音响长度的变化方面有了较大的自由度。

钢琴共鸣，则借助于钢弦与铜质共鸣板以及木制共鸣箱的三重介质，加上延音踏板的作用，其音响的共鸣，更加丰满富丽，不过，由于上文所述其律制的矛盾冲突，其丰满富丽的共鸣，就多了一份繁杂。听力优异的欣赏者，常常可以清楚觉察其律差所形成的拍音，感受其共鸣所造成的浑浊。莫扎特特别是肖邦，似乎于此有清醒的自觉。他们的钢琴曲，音响的共鸣似乎比之贝多芬、李斯特更加合乎律理。特别是肖邦对某些和弦的安排，已几近于天籁。

## （二）关于声学

律学中，响度主要是声音的振动幅度有关；音调主要与声音的振动频率有关；音色主要与声音的振动频谱有关。声音的振动幅度确切地说是对应于声音的“声压级”这个物理概念的，也就是说是可以通过设备测量表现出来的声音压力的大小，但是如果两个声音的声压级一样，人耳是否就会感觉它们的大小一样呢？不一定。人耳对不同频率而声压级一样的声音，听觉感受它们的大小也是不同的，所以这就引出了一个“响度”的概念。也就是说人耳对某些频率特别敏感，只需很小的声压就觉得很响了，这些频率集中在 1000Hz 到 4000Hz 这个区域，而最敏感的是 3000Hz 左右的声音。说起来也很有趣，婴儿的哭声大部分就是集中在这一频段附近，大概这也是人类进化的产物，婴儿不需花费太大的力气，就能让父母觉得哭声最响。

人耳对于高频、低频的敏感程度都会有所下降，<sup>10</sup>一般人们常用 20——20000Hz 来表示人耳的可感频率范围。事实上，很多人听不到 12000Hz 以上的频率，而且随着

10 华天仍《音乐声学大纲》上海音乐学院（2003 年 9 月），第 21 页

年龄的增加，高频感受的上限还要下降很多。这也就是很多老人听不到蚊子叫声的缘故。打开电视机的时候，一般都会有一个高频振荡声，大约在 12000Hz 左右，你可以试试自己能否听得到。

人们经过研究和测量，得到一个等响曲线图，100Hz 的声音，必须要有近 40dB 的声压级，人耳才能听得到，而 1000Hz 的声音，大于 0dB 声压级，人耳就能听到。因此，当改变听音的音量时，声音信号中的各频率的响度也就改变，使人感到音色的变化，所以即使是再好的放音设备，小音量时，也会感到放音频带变窄、声音变弱；相反，即使是一个普通的音响设备，开足音量，也会让人觉得放音频带展宽、声音丰满，所以根据规定，在进行专业的主观音质评价时，建议听音区的放音声级在 80—85dB。正因为音量的改变会造成音色的变化，所以录音师在调音时，要尽量保持监听音量的恒定。

声音频谱可以划分为三个或五个频段，即高频段（7kHz 以上）、中频段（500Hz~7kHz）、低频段（500Hz 以下），中频段还可再细分为中低频段（500Hz~2kHz）和中高频段（2kHz~7kHz）。下面简要介绍下各频段对音质的影响。

#### 低频

低频成分适中，声音有气魄、厚实、有力，有温暖感，丰富；但低频成分过多，则声音浑浊、沉重，有隆隆声；低频成分少，声音可能比较干净，但单薄无力。

#### 中频

增加中频可使声音有力、活跃、清晰、透亮。但中频过多，则声音的动态出不来、浑浊；低中频过多，声音会变得瓮声瓮气，象小罐声；2~5kHz 的中频过多，声音发硬、刺耳；4~7kHz 中高音频多时，会有咝咝声，如人的齿音。缺少中频，声音圆润、柔和，但松散（500~1kHz），动态出不来，沉重、浑浊（5kHz）。

#### 高频

对声音的高频成分进行提升，可使声音明亮、清晰、锐利。高频成分过多，声音刺耳、有咝咝声，轮廓过分清楚、呆板、硬、缺少弹性，有弦乐噪声。高频不足，声音圆润、柔和，但枯燥、沉重、浑浊，有遥远感。

前面已经提过，人耳在听不同音量的声音时，对不同频段的感受能力也有所不同，因此重放时的音量也很重要：音量小时，声音无力、单薄、动态出不来，无光泽；音量适中时：声音自然、清晰、圆润、柔和、丰满、和谐；音量大时，声音丰满、有力、动态出得来，音量过大时，声音生硬、不柔和。所以在专业录音时，如果总是改变监听音量的大小，调出来的声音也会受影响，为了保证录音作品的质量，录音师就要保持监听音量的适当与恒定，以确保对各个频段声音的感受前后保持一致。

概言之，钢琴的发声原理，钢琴的音板特性，钢琴的转调、演奏技巧、音响、共鸣等诸多因素都说明音律学的重要性及其深远意义。

## 第二章

### 一、律学的理论性质

1、音律起源于人类对自然历史、人天之际的乐音、谐音、自然泛音的分段振动、共振、共鸣之内外阴阳、相互关系的数理审美把握和实践应用。其中，自然泛音规律在音律起源中起主导作用。原始人在自己的生活斗争中，可通过许多途径感受到八度、五度、四度、三度等自然泛音音程的客观存在。

“律”即“音”：研究音和音之间的关系或音高关系的内在逻辑。“律”是构成律制的基本单位，在一种律制中，每一个单位称为“律”。“音”是构成音阶的基本单位，在音阶中，每一个单位称为“音”。“音”“律”二字合用而成为“音律”。

引用李曙明教授对“音律”的定义：<sup>11</sup>“音律”是乐音音高体系以及乐音音高运动的审美数理范畴。在人类的音乐活动中，音律以其绝对精确与相对自由的对立统一，数理结构与审美功能的对立统一，制约着人们音乐思维的整个过程，贯穿于一切优秀音乐作品的始终。音律随着人类音乐审美需要的发展而发展，它具有稳定的继承性和广泛的世界性。

详细地说，传统“律学”是对构成乐制的各音，依据“声学”原理、运用数理方法来进行各音之间相互关系的研究。

#### 2、音是由物体振动而生，音的类别分三种：

(1) “乐音”：该物体在一定时间内有规则地周期地反复振动，所发音有一定的高度，称之为。例各种管、弦乐器所发之音；

(2) “噪音”：物体振动毫无规则，所发音没有一定的高度，称之为。例：噪声、风雨声、磨擦声……

(3) “无高度音”：属“非整数倍”振动所生，没有确定的高度，或高度模棱两可，但有一定“音色”(这个音色不同于音的特征)，例：木鱼、梆子、锣、鼓(不定音的鼓)、钹……所发之音都属无高度音。

3、频率(单位：赫兹 HZ)：指一个物体在每秒钟内振动的次数，称为“频率”。如： $a^1=440\text{HZ}$ ，指 $a^1$ 这个音在1秒钟振动的次数为440次，也就是 $a^1$ 在1秒钟的振动频率为440HZ。频率越大(即每秒振动的次数越多)，音就越高；反之，频率越小，音就越低。频率大小决定音的高低。

人耳感受范围在：16HZ——20000HZ(超过20000HZ称为“次声波”；低于16HZ，称为“超声波”)。

例如：在同样的张力下，弦振动部分越短，频率越大(振动越快，次数越多)，音就越高；反之。即弦的长度与频率(音的高度)成反比。把弦的长度减去一半，即弦的 $1/2$ 振动，频率增大一倍，发音比全弦所发之音高一个“八度”；若弦的 $1/3$ 处振动，频率增大到三倍，发音比全弦所发之音高12度(即八度+纯五度)；若弦的 $1/4$

<sup>11</sup> 李曙明“弹性十二平均律”著于《天人乐舞》的“乐律学篇”中，敦煌文艺出版社(1999年11月第一版)，第213页

处振动，频率增大到四倍，发音比全弦所发之音高2个“八度”，以此类推。

正如：钢琴演奏“同音反复”技巧，动作越小，速度就越快，反之。同一道理。

4、复合音。基音+泛音（即“倍音”原理属于自然法则）。一条弦振动时，实际上不仅全弦振动，同时该弦的 $1/2$ 处（高八度）、 $1/3$ 处（高十二度，即八度+五度）、 $1/4$ 处（高2个八度）、 $1/5$ 处（高十七度，即2个八度+三度）……各节都在振动，都在发音，所以一个音是混合着八度、十二度、十五度、十七度等许多音而成的一种复合音。复合音是同时发出的各音的纵向结合，现将泛音列作横向排列加以说明。

以复合音C为例，将各泛音列表如下：



全弦振动发生“基音”(fundamental tone)，分节振动发生各种“倍音(overtone)”，又称“分音(overtone series)”。基音一般最强，盖过所有的倍音，通常总是以基音为高度的标准，如钢琴、弦乐、管乐，因为它们所产生的倍音是成整数倍的。但基音较弱而倍音比基音较强的情况也是存在的，如大钟（寺庙、教堂所用的单口钟），因为钟不一定按严格的基音和整数倍倍音而调音，其倍音常为非整数倍。“钟”音有基音和五个非整数倍的音，击钟开始刹那发出的音是二倍音，10秒钟之后，所有的倍音全部消逝，只剩下基音鸣响<sup>12</sup>。

##### 5、音色(倍音对音色的变化)。

对于各倍音，我们的肉耳虽不能全部听出，却在某种情况下确能听出一部分，如基音的高八度的音(二倍音)、高十二度的音(三倍音)、高2个八度的音(四倍音)和高2个八度加大三度的音(五倍音)。但是，我们所能听到的倍音，主要是影响音的音色，各种乐器所发之音所以有特殊的音色，主要由于基音内所含的倍音的数量和各倍音的强度的差异而成。

由于各种乐器的构造不同，倍音在数量和强度上发生各种变化。如有的音内，倍音只有几个，而有的音内，倍音多至二十余个甚至更多；又如有的音内，某几个倍音特别强显；而有的音内，某些倍音却消失了。所以，音内倍音的多种多样的变化，就产生各种各样的音色。就连同一件乐器其高音和低音的音色也有差异，都由音内所含倍音的数量和强度的不同而成。

如：同一品牌的两架三角钢琴，一个是186cm；一个是164cm。

186cm琴的弦比164cm琴的弦要长，击弦振动低音区弦稍长琴，倍音产生更多一些，所发音色更浑厚、丰富一些；而相对于弦稍短的琴，由于长度相对短，击弦振动频率相对要小，所产生倍音也相对少一些，所发音色就会相对显得干，共鸣少，音色不丰富等。就连同一架钢琴，低音倍音数量多、丰富，高音倍音数量少、干亮，也是因为与倍音的数量和倍音的强度有关。即倍音数量越多，所发之音音色越显丰富，反之音色越干。因此弹奏每个复合音，由于所奏的“方、位、力、速”不同，所产生的音色也不同。（关于“音色”详述见第三章）

12 缪天瑞《律学》人民音乐出版社（1996年第三次修订版），第14页

## 二、音律计算

<sup>13</sup>音律计算法就是音程的计算法。一门科学当完善地运用数学时，才达到了高级阶段。恩格斯、毕达哥拉斯说“万物皆本于数”。

### 1. 根据“频率”来计算（见附录：音分值和频率对照表）

(1) 用“频率比”(即两个频率的比数)来表示两音的距离，也就是用频率比来表示音程的大小。(“f”表示音的频率；“2”表示八度)。

频率比 = 音程的大小(两音之间的距离)

如：C 和 c

C 的频率查出为：65.4075HZ

c 的频率查出为：130.815HZ } 频率比：130.815HZ/65.4075HZ=2/1

[注：表示频率比时，把较大的数作为分子(上)，较小的数作为分母(下)]

所以，C 与 c 的频率比为 2/1，其振动体长度比则为 1/2 (频率比与振动体长度比互成“倒数”关系)。

### (2) 互为“倒数”关系的音程频率比还有：

求该音程的上方音与下方音构成同度音程的频率比，只要用该音程频率比的“倒数”即可。

如：C<sup>1</sup> 与上方纯五度 g<sup>1</sup> 的频率比为：g<sup>1</sup>/C<sup>1</sup>=3/2

C<sup>1</sup> 与下方纯五度 f 的频率比为：C<sup>1</sup>/f=2/3

### (3) 求两音程之和的频率比，把两音程的频率比相乘即可。

如：纯四度 4/3 与纯律大三度 5/4 之和为纯律大六度

计算：4/3×5/4=5/3 (为纯律大六度频率比)

### (4) 求两音程之差的频率比，把较大音程的频率比除以较小音程的频率比即可。

如：纯五度(3/2)与纯律小三度(6/5)之差为纯律大三度

计算：3/2÷6/5=5/4(为纯律大三度频率比)

### (5) 从已知一音的频率，根据数率比求其它相应各音的频率。

如：已知 C<sup>1</sup> 的频率=261.63HZ，求 3/2(纯五度 g<sup>1</sup>)、2(八度 C<sup>2</sup>)、3/2(下五度 f)的频率。

$$261.63(c^1) \times 3/2 = 392.45\text{HZ}(g^1)$$

$$261.63(c^1) \times 2 = 523.26\text{HZ}(c^2)$$

$$261.63(c^1) \times 2/3 = 174.42\text{HZ}(f^1)$$

计算音律时，一般限于八度之内，超出八度时就要移低到一个八度内，就要除以 2(即 1/2)；若超两个八度，就除以 2 的 2 次方(即 1/2<sup>2</sup>)；超 N 个八度，就要除以 2 的 N 次方(即 1/2<sup>n</sup>)。若移高八度，就要乘以 2，以此类推。

例如：g<sup>2</sup> 移低一个八度 → g<sup>2</sup> 的频率/2=g<sup>1</sup> 的频率 (移低一个八度)

e<sup>5</sup> 移低四个八度 → e<sup>5</sup> 的频率/2<sup>4</sup>=e<sup>1</sup> 的频率 (移低四个八度)

13 缪天瑞《律学》人民音乐出版社(1996年第三次修订版)，第23页

$f$  移高一个八度 $\rightarrow f$  的频率 $\times 2=f'$  的频率 (移高一个八度)

$A$  移高三个八度 $\rightarrow A$  的频率 $\times 2^3=a^2$  的频率 (移高三个八度)

## 2. 根据“音分值”来换算

频率比还可换算成“音分值” centvalue 简写“cent”

例：把五度相生律中的大全音和小半音两个音程，频率比换算成音分值：

$9/8$ (大全音)=204cent

$256/243$ (小半音)=90cent  $\rightarrow 204/90=2.26$ (即大全音有 2 个多小半音那么大)

这样运用音分值就很容易看出音程的大小了。

## 3. 根据“对数”求音分值

根据对数求音程的音分值：

(1) 先求比例常数： $1200$  (音分值的八度之值) /  $0.30103$  (常用对数的八度之值) =  $3986.3137$  (比例常数)

(2) 再求纯律的纯五度音分值： $0.17609$  (查出的纯五度常用对数)  $\times 3986.3137$  (比例常数) =  $701.950 \approx 702$  cent(纯律纯五度音分值)

## 4. “音程值”来表示频率比大小

频率比还可以用“音程值”来表示音程的大小，应用“对数 log”的原理演算：常用的对数是以 10 为底的对数。

如：求  $9/8$ (全音)比  $256/243$ (半音)大多少？

步骤 (1) 先把两个分数化为小数： $9/8=1.12500$ (全音)、 $256/243=1.05349$ (半音)；

步骤 (2) 再从对数表查出这个小数的对数： $1.12500 \Rightarrow 0.05115$  、

$1.05349 \Rightarrow 0.02263$  ；

步骤 (3) 最后把两个对数加以比较即可： $0.05115 - 0.02263 = 0.02852$  。

由此可以比较出，五度相生律的大全音比小半音的 2 个还多。

写法：用数字的符号和表达式，表示如下：

$$\log_{10}1.125=0.05115 \text{ 或 } \lg 1.125=0.05115$$

用对数表示： $10^a=A$  ( $10$  为“底”、 $a$  为“对数”、 $A$  为“真数”，即表达为： $a$  就是以  $10$  为底所成的  $A$  的对数)

例如： $9/8$  的对数表示 $\Rightarrow 10^{0.05115}=1.125$  [ $10$ (底)、 $0.05115$ (对数)、 $1.125$ (真数)]。

以上对音程大小的计算，用对数值更精确；用音分值更方便

(注：研究纯律或五度相生律是与十二平均律作比较加以分析)

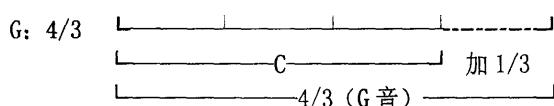
### 三、五度相生律

公元前8世纪—公元前3世纪，有管仲（公元前730—645）及吕不韦（公元前249—237）提出“三分损益”法，实际上就是五度相生律，这也是中国最早的律制。

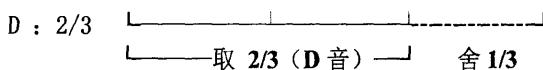
1. “三分损益律”，中国古籍中记载科学的律学理论，以管仲的《管子》（地员篇）为最早，在该论文中，提出了“三分损益律”。

“三分损益律”既是生律的方法，也是定律的方法：按照“下四上五”原则，即把一个振动体（如弦长C）的长度平均分为三段，加其三分之一，所得三分之四，称为“三分益一”，频率比为 $4/3$ ，所发之音为下方的纯四度G音；再把这根 $4/3$ 弦长的G音平均分为三段，舍其三分之一，取其三分之二，称为“三分损一”，振动体为全长的 $2/3$ ，频率为 $3/2$ ，即得一个上方纯五度D音；以此类推。

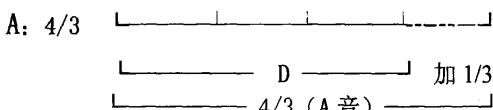
如图：取一根一定长度的弦，设其发音为C  
“三分益一”（下四）：在C音上均分三段，加其 $1/3$ ，所得 $4/3$ 就是下四度“G音”，频率比为 $4/3$ =纯四度：



“三分损一”（上五）：在G音基础上舍其 $1/3$ ，取其 $2/3$ ，为上五度“D音”，频率比为 $3/2$ =纯五度：



“三分益一”（下四）：再D音基础上，加其 $1/3$ ，所得 $4/3$ 就是下四度“A音”，频率比为 $4/3$ =纯四度：



如此继续下去，以此类推，通过三分“益一”（下四）和三分“损一”（上五）交替相生的方法，就可产生了一个五声音阶的C、G、D、A、E各音，按照同样的生律方法，再继续下去，就可产生12律了。

三分损益法采用的“三分益一”（下四）和“三分损一”（上五）的方法为生律要素，而下行四度实际上是五度的音程转位，这实际上是五度相生律的体系，所以，三分损一就是五度相生律。

2. 毕达格拉斯提出的五度相生律：以“纯五度叠加”的原则（方法区别于前），即从一个音出发，以纯五度相叠加，最终在七个八度的范围内，叠加12次，得到十二个半音，将这十二个半音移到一个八度内，就形成了五度相生律的音价。

但是，经过 12 次叠加到最后一个音<sup>#</sup>B，从表面上看，它与 C 是等音关系，实际上，却比 C 音要高（高 24 音分）。就是说，五度相生律从 C 出发叠加十二次，最终无法真正回到出发音 C。

因为：五度相生律纯五度比平均律的纯五度高 2 个音分，相生 12 次纯五度就高出 24 个音分 ( $2 \times 12 = 24$ )。因此，相生到第 12 个音<sup>#</sup>B 就比原来的 C 高出 24 个音分。

即 (24 音分也称之为“最大音差”)

由此，五度相生律中的音程就出现了大音阶特征。

### 3. 五度律大音阶中有三种音程，为特有。如下：

①c-e (81/64，计 408 音分)，称为“五度律大三度”（相距 4 个五度级： $2 \times 4 = 8$ ）

②c-a (27/16，计 906 音分)，称为“五度律大六度”（相距 3 个五度级： $2 \times 3 = 6$ ）

③c-b (243/128，计 1110 音分)，称为“五度律大七度”（相距 5 个五度级： $2 \times 5 = 10$ ）。

### 4. 五度相生律的音程特点：

(1) “五度相生律大音阶”的大全音和小半音：

五度律大音阶：就由大全音 (204) 和小半音 (90) 构成。

大全音：9/8=204 音分，(如 c-d)，比平均律全音 200 多 4 个音分，因此五度律的大全音要相对高一些，才符合五度律特点。

小半音：256/243=90 音分，(如 e-f)，相距 5 个五度  $2 \times 5 = 10$ ，比平均律半音 100 少 10 个音分，因此五度律小全音要相对低 10 个音分，才符合五度律特点。

五度律的大全音（相距 2 个五度级）有：c-d、d-e、f-g、g-a、a-b

五度律的小全音（相距 5 个五度级）有：e-f、b-c

五度相生律的大音阶如下：

音级:	1	2	3	4	5	6	7	i
音名:	c <sup>1</sup>	d <sup>1</sup>	e <sup>1</sup>	f <sup>1</sup>	g <sup>1</sup>	a <sup>1</sup>	b <sup>1</sup>	c <sup>2</sup>
与主音								
频率比:	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2/1
音分值:	0	204	408	498	702	906	1110	1200
	∨	∨	∨	∨	∨	∨	∨	∨
相邻两音								
频率比:	9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	9/8	256/243	
音分值:	204	204	90	204	204	204	90	
(注: 204 是大全音, 90 是小半音)								

### (2) 五度律大音阶的“增四度”和“减五度”

增四度：f<sup>1</sup>-b<sup>1</sup>

减五度：b<sup>1</sup>-f<sup>2</sup> }互为转位音阶，都相距 6 个五度级。

五度律增四度=1110 音分 (c<sup>1</sup>-b<sup>1</sup>) - 498 音分 (c<sup>1</sup>-f<sup>1</sup>) = 612 音分

五度律减五度=498 音分+1200 音分 (c<sup>1</sup>-f<sup>2</sup>) - 1110 音分 (c<sup>1</sup>-b<sup>1</sup>) = 588 音分

即增四度比减五度多  $612 - 588 = 24$  音分（即一个“最大音差”）。

5. 五度律小音阶：自然小音阶与五度律大音阶一样，只是全音和半音位置不同罢了。

(1) “和声小音阶”: 六级音和七级音 ( $\text{^h}a-b$ ) 之间出现一个特殊音程增二度。

$$\text{增二度 (由 9 个五度音级构成)} = \text{大全音 (9/8)} + \text{五度律大半音 (2187/2048)} \\ = 204 + 114 = 318 \text{ 音分}$$

五度律的增二度与五度律的小三度比较：

$$318 \text{ 音分 (增二度)} - 294 \text{ 音分 (小三度)} = 24 \text{ 音分 (最大音差)}$$

所以在五度律中增二度大于小三度，也就是在和声小音阶中，增二度是导音位置更倾向于主音。

(2) 增二度转位后是减七度，减七度和大六度在平均律中都由9个半音构成，但五度律的大六度（频率比 $27/16$ ，计906cent）比减七度（频率比 $32768/19683$ ，计

882cent), 906-882=24cent, 大一个最大音差。

(3) 五度律的增五度和小六度：增五度( $6561/4096$ , 计 816cent) 比小六度( $128/81$ , 计 792cent), 即  $816-792=24$ cent, 也大一个最大音差。

五度律和声小音阶如下：

音阶:	1	2	3	4	5	6	7	i
音名:	c <sup>1</sup>	d <sup>1</sup>	e <sup>1</sup>	f <sup>1</sup>	g <sup>1</sup>	a <sup>1</sup>	b <sup>1</sup>	c <sup>2</sup>
与主音								
频率比:	1	9/8	32/27	4/3	3/2	128/81	16/9	2/1
音分值:	0	204	294	498	702	792	996	1200
	∨	∨	∨	∨	∨	∨	∨	∨
相邻两音								
频率比:	9/8	256/243	9/8	9/8	256/243	19683/16384	256/243	
音分值:	204	90	204	204	90	318	90	
(注: 204 是大全音, 90 是小半音)						↑(增一度)		

#### (4) 五度律的大半音和小半音比较:

大半音为“变化半音”即  $c - \sharp c$ : 114 音分;

小半音为“自然半音”即  $c - \sharp d$ : 90 音分,

即  $114-90=24$  音分。

所以 $c$ 比 $d$ 也高一个最大音差24音分，即在五度律中，凡同音名的半音都是大半音（如 $c-^c:114$ 音分）；不同音名的半音都是小半音（如 $c-^d:90$ 音分）

在实际演奏中，弦乐的演奏，在一定条件下，将升记号的音演奏高一些，降记号的音演奏低一些。正是其特点之显示。

## 四、 纯律

欧洲古代音乐，9世纪以前，主要是单音音乐，单音体音乐占主导地位。

9世纪以后，由于音乐从单音体向多声部发展，即复音音乐，多声部音乐开始萌芽，但主要还是以四度、五度、八度为主，渐渐人们已不满足于只用四、五、八度，增加三、六度之运用成为历史发展的必然趋势。在14世纪，三、六度的同时结合，得到普遍应用。

在13世纪，英国的修道士，音乐理论家奥丁汤于1275年-1300年间提出纯律的三度音列，并在理论上认为三度和六度音程结合为协和音程。

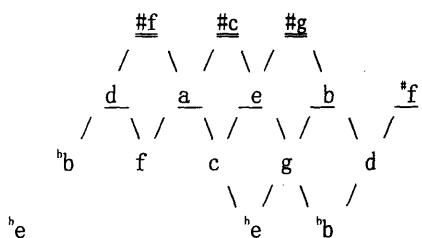
13世纪时，德国科隆的音乐家弗朗科，把纯律大三度(5/4)和纯律小三度(6/5)作为协和音程。

受文艺复兴运动的激发，复调音乐进入新的阶段，在14世纪初期渐向成熟，注重纯律的音程，应用在多声部的结合上，以获得和谐的效果，在16世纪进入繁盛时期（也与当时的教堂合唱发展鼎盛时期有关）。

“约自15—17世纪‘文艺复兴’时期（1430-1650）是纯律时期。

其中意大利著名的音乐理论家：札礼诺（1517-1590）在文艺复兴运动全盛时期对律学方面的贡献是：他不仅对纯律而且对中庸全音律和十二平均律都有一定的研究，他于1588年设计了一种键盘，是为了应用纯律音阶，这个键盘包含十六律（即十六个键音）。

如图，键盘包含的十六律：



此外他首先提示和弦的原理，不仅为近世和声学作好了理论准备，而且给纯律的和弦构造提供了科学依据。他于1558年在所著《和声原理》书中，提出了和弦构成的原理。

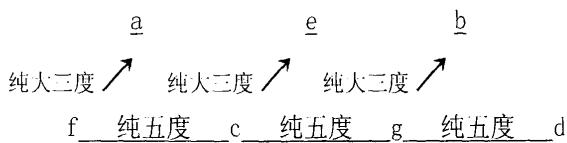
札礼诺发现，把一根弦分为1/2、1/3、1/4、1/5、1/6各节，就产生了上方八度、五度、三度的音；反过来，将一弦加长2、3、4、5、6倍，就产生下方八度、五度、三度的音，如：



札礼诺根据这个原理，指出所有的协和音程都保持在  $1:1/2:1/3:1/4:1/5:1/6$  和  $1:2:3:4:5:6$  这种比数，前者比数形成的是大三和弦，后者比数形成的是小三和弦，大小三和弦的区别，就在于大三度和小三度的位置不同而起，这样根据大小三和弦的性质又可分为大调式和小调式两类，称为近世的“二元论”。

### 1. 纯律的大音阶

纯律的产生是在五度相生律的基础上，在五度之间再插入一个纯律大三度。如 c—g 之间插入一个纯律大三度 e 音，构成一个三和弦的音列 c—e—g（音名下面的短线，表示低一个普通音差，即五度律大三度 408—纯律大三度 386=22 音分“22 音分称为普通音差”）。如下图式：



如：纯律大音阶表

音级：	1	2	3	4	5	6	7	8
音名：	c <sup>1</sup>	d <sup>1</sup>	e <sup>1</sup>	f <sup>1</sup>	g <sup>1</sup>	a <sup>1</sup>	b <sup>1</sup>	c <sup>2</sup>
产生法：	1	(3/2) <sup>2/2</sup>	5/4	2/3×2	3/2	4/3×5/4	3/2×5/4	2/1
与主音频率比：	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2/1
与主音音分值：	0	204	386	498	702	884	1088	1200
	∨	∨	∨	∨	∨	∨	∨	∨
相邻两音频率比：	9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15	
相邻两音音分值：	204	182	112	204	182	204	112	
(注：182 是小全音，112 是大半音)								

纯律最主要的特点是：它的三个正三和弦是完全协和的，之所以发音和谐，是由于这些和弦中各音之间合乎于整数倍音的原理。此外：

(1) 同于有纯大三度，所以，也就有了纯小三度 (e-g) 也是协和的。

(2) 仔细观察纯律，就会发现，同样是全音，它们之间的关系并不一致，如 c-d，频率比为 9/8，而 d-e 的频率比为 10/9，那么这两个全音，c-d 比 d-e 大多少呢？计算为：

$$9/8 \div 10/9 = 81/80 \text{ (22 音分) 即这个 22 音分称为“普通音差”}$$

在纯律中，凡是用纯大三度相生的律，都会有这个音差。

(3) 纯律大音阶与五度律大音阶相比较：

纯律大音阶的 II (d)、IV (f)、V (g)、VII (c) 各级音与五度律大音阶完全相同，但是，III (e)、VI (a)、VII (b) 各级音就不同了，两个律制的分歧就在于此。

III、VI、VII 级这三个音，在五度相生律上都由五度相生而得，而在纯律上则凭借音原理，加入纯律大三度而成。由于生律元素相异的两种律制产生了相应不同高度的各种音程。例：

纯律的大音阶上的 e、a、b (“-” 表示低一个音差列)，都比五度律大音阶上的同名音稍低；都低一个“普通音差 22 音分”，计算：

$$(\text{五度律大三度}) \frac{81}{64} \div (\text{纯律大三度}) \frac{5}{4} = \frac{81}{80}$$

即：408（五度律大三度）-386（纯律大三度）=22 音分，表示该音比五度相生法所生之同名音低一个普通音差。

(4) 纯律中的“小全音”(182 cent) 和“大半音”(112 cent)

由于 e 音的降低，使 d-e 成为“小全音”(10/9, 182 音分)。

同时使 e-f 成为一种较大的半音 (16/15, 112 音分)，称为“纯律大半音”；b-c' 也一样是“纯律大半音 112 音分”。

(5) 五度 (702)，而是一个比纯五度少一个普通音差 (22 音分) 的“狭五度”(频率比是 40/27，计 680 音分)；转位后 a-d 是比纯四度 (498) 大一个普通音差 (22 音分) 的“宽四度”(频率比是 27/20，计 520 音分)，这是纯律本身存在的矛盾，为了解决这个矛盾，最终出现了“中庸全音律”(1571 年，札礼诺提出的“1/4 音差中庸全音律”见下述)

## 2. 纯律小三度和纯律小音阶：

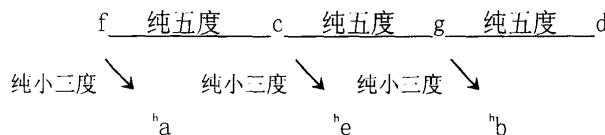
(1) 由于纯律中纯五度和纯大三度的存在，它们相减，就得到纯小三度，其频率比为：

$$\frac{3}{2}(\text{纯五度}) \div \frac{5}{4}(\text{纯大三度}) = \frac{6}{5}(\text{纯小三度}, 316 \text{ 音分})$$

与五度律的小三度 294 音分比较：316-294=22 音分，

所以纯律小三度比五度律小三度高出一个普通音差 22 音分。

(2) 纯小三度也是协和音程，因此可以用来产生纯律小音阶：



如：纯律小音阶表：

音级：	1	2	3	4	5	6	7	i
音名：	c	d	<sup>h</sup> e	f	G	<sup>h</sup> a	<sup>h</sup> b	c'
产生法：	1	$(3/2)^2/2$	$6/5$	$2/3 \times 2$	$3/2$	$4/3 \times 6/5$	$3/2 \times 6/5$	2
与主音频率比：	1	9/8	6/5	4/3	3/2	8/5	9/5	2
与主音音分值：	0	204	316	498	702	814	1018	1200
	∨	∨	∨	∨	∨	∨	∨	
相邻两音频率比：	9/8	16/15	10/9	9/8	16/15	9/8	10/9	
音分值：	204	112	182	204	112	204	182	
(注：112 是大半音，182 是小全音)								

通过分析纯律大小音阶相邻两音的频率比，可以看出，它们的构成规律基本是一

样的，只是大小三度的位置不同。即纯律大小音阶的全音只有两种：大全音（9/8，计 204 音分）和小全音（10/9，计 182 音分）；半音只有一种：大半音（16/15，计 112 音分）。因此，同样是全音也有大小之分，如 c-d 大全音（204）；d-e 小全音（182），  
204-182=22，相差一个 22 音分普通音分。

### 3. 纯律大半音和纯律小半音

根据纯律生律方法，可以计算出，C-<sup>#</sup>C 的频率比为 25/24（71 音分），而 c-<sup>b</sup>d 频率比为 16/15（112 音分），<sup>#</sup>C 不等于 <sup>b</sup>d，而且相差很多：

大半音：16/15（112 音分）是“纯律大半音”；

小半音：25/24（71 音分）是“纯律小半音”。

比较：五度律的大半音：114 小半音：90

纯律的大半音：112 小半音：71

在纯律中的半音，差不多都同样的情况，所以，在纯律中，扩张出来的音，在一个 C 大、小调中，可达“三十七律”这给纯律的运用特别是转调，也带来了很大的困难，无论怎么循环，是无法回到出发音上去的（而纯律解决了多声部结合声音和谐的问题，即合唱的和谐，但这样的和谐要求在键盘乐器上的运用就很困难了）。

总结纯律和五度律音阶特点：

① 两律大小三度比较，如 C 大调与 c 小调：

大音阶大三度：纯律 c-e=386 比五度律 c-e=408 => 408-386=22 音分（低于）；

小音阶小三度：纯律 c-<sup>b</sup>e=316 比五度律 c-<sup>b</sup>e=294 => 316-294=22 音分（高于），  
纯律大三度低于五度律大三度 22 音分；纯律小三度高于五度律小三度 22 音分，

即都是相差一个“普通音差”。

② 两律四五度比较：

纯律不协和音程（在大音阶中）d-a 是“狭五度”680 音分比五度律 702 音分少

22 音分一个普通音差；a-d 是“宽四度”520 音分比五度律 498 音分多 22 音分

一个普通音差。

两律总结：五度相生律适用于单声音乐的曲调，（由纯五度相生），但是当音乐变为和弦结构的“多声部音乐”（包括复调音乐和主调音乐）时，律制就倾向于纯律（由纯五度之间加入纯大三度/纯小三度构成大小音阶律制）。

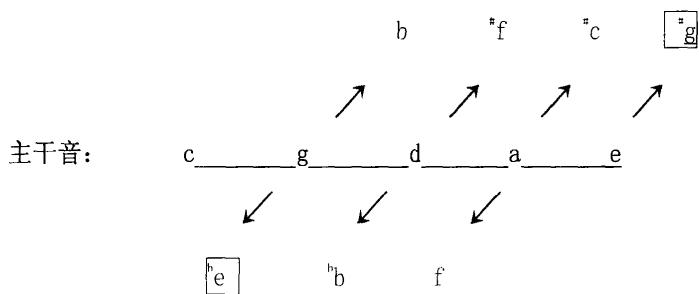
纯律解决了多声部结合（即构成和弦）时声音和谐的问题，但是不能解决“回到出发律”的问题，这是纯律本身存在的又一矛盾（另一矛盾是 d-a 的“狭五度”，如果把 d 降为 d，又使 g-d 又出现“狭五度”这是纯律本身存在的矛盾之一）。同时由于曲调与和弦互有关系，使适于曲调的五度相生律和适于和弦的纯律两者之间发生一定的矛盾，即一种律制除了本身存在着矛盾之外，又与它种律制发生矛盾。

由于纯律在运用中，特别是键盘乐器的运用中很困难，即无法转调，为了解决旋言转调问题，在 16 世纪，意大利理论家札礼诺提出了“1/4 音差中庸全音律”，所谓“中庸全音律”，就是把纯律中的大全音和小全音加以平均。（见下述）

## 五、“中庸全音律”

<sup>15</sup>意大利的札利诺于1588年用计算的方法提出十二平均律。札利诺在此之前为解决纯律在键盘乐器中运用的困难于1571年还提出了欧洲重要的一种律制：“中庸全音律”（mean-tone temperament），利用纯律发明键盘十六律；后来过半世纪后法国的默森（Marin Mersenne 1588—1648）于1635—1636年间发明了键盘二十六律（这是一种不规则律）。

我们知道，五度音列 c-g-d-a-e 中的 e 音与 c 音不谐和，须把 e 音降低为  $\text{e}'$  音（即降低 22 音分基本音差），才纯然相和，使它与 c 构成一个纯大三度（386 音分）；然后把这个 22 音分平均分配到四个纯五度中去，每个减少  $22 \div 4 = 5.5$  音分（即  $1/4$  音差），成为一个 702 音分（纯五度）  $- 5.5$  音分 = 696.5 音分 的“中庸全音律五度”；然后，在这个五度音列（696.5 音分）基础上，加入纯大三度，形成十二个音，如下图式：



[注：外侧两个音  $\text{g}'$  和  $\text{e}'$  的音程关系因为音色刺耳，形同狼叫，故称之为“狼音音程”，即“狼音五度 wolf fifth”（这里  $\text{g}' \neq \text{a}'$ ），两律相距为 737 音分，比纯五度 702 音分大 35 音分。]

c-g: 696.5 音分  $\approx$  697 音分  
c-d:  $696.5 + 696.5 = 1393$  音分（移低至一个八度内： $1393 - 1200 = 193$ ）即 193 音分  
c-a:  $193 + 696.5 = 889.5$  音分  
c-e:  $889.5 + 696.5 = 1586$  音分（移至一个八度内： $1586 - 1200 = 386$  音分）= 386 音分  
g-b:  $696.5$ （纯五）+ 386（大三）= 1082.5 音分  $\approx$  1083 音分  
c-f:  $889.5$ （十六）- 386（大三）= 503.5 音分

这样，就形成“中庸全音律”的大音阶：

15 华天仍《音乐声学大纲》上海音乐学院（2003 年 9 月），第 34 页

音名:	c	d	e	f	g	a	b	c
与主音的音分值:	0	193	386	503.5	697	889.5	1083	1200
	∨	∨	∨	∨	∨	∨	∨	∨
相邻两音音分值:	193	193	117	193	193	193	117	

由此，可以看出中庸全音律的特点：

- ① 全音、半音只有一种，不分大小（即全音=193 音分，半音=117 音分），这样“1/4 音差中庸全音律”就可在一定范围内完成转调了。
- ② 大三度有 2 个全音合成，与纯律大三度完全一样：193+193=386 音分。
- ③ 中庸全音律的大小三度和大小六度都合于纯律，能发出纯律的效果。这是它的主要优点，解决了和弦发音和谐的问题，使它成为中世纪键盘乐器上最通行的律制。

但也有其不足：

- ① 就是它生律所产生的最外面的两个音<sup>#</sup>g 和 <sup>♭</sup>e 形成一个“狼音五度”，其音分值为 797.65，比“中庸全音律五度”697 音分约多出半个半音（737.65-697=40.65 音分）。音色刺耳，形同狼叫。
- ② 中庸全音律因为有“狼音五度”的音程，所以在转调上也受一定的限制，它能在一定范围内转调：即它只能适用于 7 个大调（C、G、D、A、E、F、B）和 5 个小调（a、d、e、b、<sup>#</sup>f），超出这个范围，就会发生显著不准的音程。这种“狼音五度”造成五度音列中两极（或接近两极）的二律不能合理连接，从而成为五度音列无法循环的障碍物。

为解决以上律制在转调上存在的任何问题和不足，中国明朝的朱载堉（1536-1612）在扬弃蔡元定“18 律”、京房“60 律”、钱乐之“360 律”的过程中，运用易学、数学、历学、哲学、美学等多学科原理交叉、参照，提出“天之大数，莫过十二”，发明并精确计算出了十二平均律，即把一个八度分成频率比相等的 12 个半音的律制，每个半音均为 100 音分，一个八度就是 1200 音分，也称为“十二等比率”，彻底而完美地解决了“旋宫转调”的千古难题。（见下述）

## 六、十二平均律

<sup>16</sup> “十二平均律”是中国明朝王子朱载堉<sup>a</sup>（1536-1612）发明的。他在1581年发表的《律历融通》中称十二平均律为“新法密律”；在1584年发表的《律学新说》中，提到了计算方法；在1596年作序的《律吕精义》一书中，才公布了详细的计算方法。他的发明这是对中国律学史上一项重大的贡献。十二平均律是各相邻（即半音）律之间其“频率比”都相等的一种律制（半音均为100音分）。

计算方法，最方便的一种是：将2（即八度）开12次方，就得频率公比数1.059463094，（约等于1.05946。这就是十二平均律半音的频率比。）该公比自乘12次即得十二律中各律音高，且黄钟正好还原。用这种方法第一次解决了十二律自由旋宫转调的千古难题。如下公式：

$$\text{平均律半音公式: } \sqrt[12]{2} = 1.05946 \text{ (用无理数小数表示)}$$

用音分表示半音=100音分。

十二平均律首次解决了十二个半音的循环，而且，所有的音距离都相等，使<sup>#</sup>c=<sup>h</sup>d，这样使各种转调都成为可能，解决了以前多种律制无法解决的矛盾，成为当代音乐界的主导律制，该律可算三律中的较佳律制。

见本文P.52—P.96：钢琴88个键的“音分值和频率对照总表”

注：此对照表每一个音就有100个音分，88个音共有8800个音分。从对照表中可以发现：最低音A<sub>2</sub>的100个音分（从1—100）之间相差2个Hz，而最高音c<sup>5</sup>的1个音分之间相差为2个Hz左右。由此得出结论，低音频率较疏（振动次数较少，音则低）；高音频率较密（振动次数较多，音则高）。

十二平均律也有其缺点：

十二平均律除了八度以外，所有音程都不成整倍数比例关系，（也就是说所有音程都有拍音，不纯），严格说来，都是不协和的，它在构成和弦时，没有纯律那样谐和（没有拍音，成整倍数比）。

---

16 缪天瑞《律学》人民音乐出版社（1996年第三次修订版），第150页

## 七、三律的差异

十二平均律是使律制简化的一种律制，从五度相生律和纯律到十二平均律，从律制上说，是由繁到简，具体表现在音阶和音程上(前面已讲述过)。五度相生律和纯律，都随调的增加而不断加多律数；而十二平均律它是用 12 个律应付一切的变化。

### 三律特点

五度相生律：适用于单声部音乐的曲调，该律长于旋律美的表现，使旋律具有一种倾向美、向心美。故称旋律性律制。

纯律：适用于多声部音乐，倾向于和弦结构，该律长于复调与和声美的表现，声音的和谐，适于合唱、室内乐。故称和声性律制。

十二平均律：适用于各种转调、离调，该律有调性应付自如，给人以自由解放、通畅无阻的美感。故称转调性律制。

### 三律比较

平均律与五度相生律比较：五度相生律大音阶的四级音比十二平均律大音阶的四级音低 2 音分；五级音则高 2 音分；二级音高 4 音分；六级音高 6 音分；三级音高 8 音分；七级音高 10 音分，即按照五、二、六、三、七各级音次序递增 2 音分。

平均律与纯律比较：纯律的二、四、五各级音与五度相生律相同。但是三、六、七各级音，纯律与平均律相比，差数较大。五度相生律最多只差 10 音分（七级音），而纯律七级音相差 12 音分。五度相生律的七级是高于平均律七级 10 音分（即  $1110-1100=10\text{cent}$ ）；纯律的七级是低 12 音分（ $1100-1088=12\text{cent}$ ）。三、六各级音差数逐渐加多，三级低 14 音分；六级低 16 音分。依此序递增 2 音分。

在大音阶中，由于平均律和五度相生律比较其最大音分差数为 10 音分（即五度相生律的七级音高 1110 音分—平均律的七级音高 1100 音分=10 音分）；而和纯律相比，最大音分差数则为 16 音分（即平均律的六级音高 900 音分—纯律的六级音高 884 音分=16 音分），结果纯律相差为甚，也就是说，十二平均律较接近于五度相生律，而较远离于纯律。

从三律之间的音分差看出音程的和谐度，纯律比五度相生律更趋向自然协和的音程，而十二平均律有其它的缺点，例如，它影响音程的和谐性，又使音程的协和与不协和的范畴混淆不清，等等。这与它们的音程和大小音阶的结构及频率的大小有关。

下面把三律的大音阶和小音阶用表格来进行比较，就更明白了。

如下：

大音阶三种律制比较表

音 级	1	2	3	4	5	6	7	i
五度相生律	0	204	408	498	702	906	1110	1200
	∨	∨	∨	∨	∨	∨	∨	
	204	204	90	204	204	204	204	90
(注: 204 是大全音, 90 是小半音)								
十二平均律	0	200	400	500	700	900	1100	1200
	∨	∨	∨	∨	∨	∨	∨	
	200	200	100	200	200	200	200	100
(注: 200 是全音, 100 是半音)								
纯 律	0	204	386	498	702	884	1088	1200
	∨	∨	∨	∨	∨	∨	∨	
	204	182	112	204	182	204	204	112
大全音 小全音 (大半音) 大全音 小全音 大全音 (大半音)								

小音阶三种律制比较表

音级	1	2	<sup>b</sup> 3	4	5	<sup>(b)</sup> 6	7	( <sup>#</sup> 7)	i
五度相生律	0	204	294	498	702	792	996	(1110)	1200
	∨	∨	∨	∨	∨	∨	∨		∨
	204	90	204	204	90	204	(318)		90
(注: 204 是大全音, 90 是小半音, 318 是增二度)									
十二平均律	0	200	300	500	700	800	1000	(1100)	1200
	∨	∨	∨	∨	∨	∨	∨		∨
	200	100	200	200	100	200	(300)		100
(注: 200 是全音, 100 是半音, 300 是增二度)									
纯 律	0	204	316	498	702	814	1018	(1088)	1200
	∨	∨	∨	∨	∨	∨	∨		∨
	204	112	182	204	112	204	(275)		112
大全音 大半音 小全音 大全音 大半音 大全音 (增二度) 大半音									

仔细观察以上两个对照表, 得出以下结论:

- (1) 纯律与五度相生律之差距存在于三、六、七各级音上; 并按照五、二、六、三、七各级音次序递增 2 音分。
- (2) 各种全音和半音方面的差距, 在大音阶时没有区别。只是在和声小音阶上多一种增二度音程; 其差数在五度相生律中大 18 音分, 在纯律中小 25 音分。
- (3) 无论在音阶各音上或其间的音程上, 都是纯律方面差数较大。
- (4) 在大音阶, 三、六、七各级音, 纯律低于十二平均律。在小音阶(自然小音阶), 三、六、七各级音, 纯律高于十二平均律。

从音分的差数上比较三律音程(即和弦)的和谐度, 在十二平均律小音阶上构成三个正三和弦时, 其小三和弦的三音, 比在五度相生律上高 6 音分, 而比纯律低 16 音分。十二平均律上这种比纯律低 16 音分较低的三音, 也影响和弦的和谐度。

三律各有长短、优劣，因此，取三律之长，避三律之短，融三律之优，弃三律之劣，使三律融为一个自由变通的统一体，构成一个兼涵三律之美的新的律制，即李曙明先生（1942—）“复频弹性十二平均律”之研究的动因与结果。（接下分析）

## 八、钢琴三律蕴涵——复频弹性十二平均律

人类的音律审美需要从古至今，大体呈现为从单一性向综合性发展的趋势。旋律、复调、和声的美，满足不了对调的自由转换的审美需要，十二平均律的产生，基本上能满足人们的这一需要，但在音乐实践中，纯律和五度相生律继续相对独立地发挥着十二平均律难以替代的独特审美功能。而三律的任何一种，都难以满足这一审美需要。所以人们才自觉不自觉地将三律共用于音乐实践之中。演唱、演奏大都要在音律上都是在三律间往返完善的变通运动。

从宏观的立场观察，将三律视为一个大的统一音律系统的三个侧面，这三个侧面在数理上无限延伸几乎可达完全同一的程度；在实践中，三律更是互相渗透、互相包含、互相转化。三律间数量差异，割不断三律间的审美同一性，其小的差异（如2—4音分左右之差）不但不影响审美效果，而且常有丰富审美效果之功用；其较大的差异（如14—22音分左右之差），经适当调整亦能与人的审美需要相吻合。这样即可构成一种兼顾三律审美功能特色的新型综合性律制，即复频弹性十二平均律，这也是当代律学的重大课题。

### 弹性十二平均律

“弹性”就是指一个音在一定频域幅度的变化。“弹性十二平均律”是以十二平均律作为基础，这样就具备了自由转调的审美功能。

<sup>17</sup> 所谓“弹性”就是具有上下“↗、↘”14音分的音差，把这一音差输入到十二平均律中去，使十二平均律的各律都有上下两种方向的弹性变化，14音分称为“弹性音差”。

“14音分弹性音差”的探究：纯律大三度386音分与平均律大三度400音分形成一个14音分的音差；386音分的纯律大三度可分解为三个平均律半音加86音分的“小二度”，这个小二度与90音分的小二度仅差4音分，但在倾向性的半音进行中，其效果优于90音分的小二度进行，因此就用86音分的小二度代替90音分的小二度。86音分的小二度与100音分的平均律小二度也形成一个14音分的音差；300音分的平均律小三度加上14音分的音差是314音分的近纯律小三度（纯律小三度为316音分）；100音分的平均律小二度加上14音分的音差正好是五度相生律的大半音——114音分，五度相生律的大半音114音分与平均律小二度100音分也形成一个14音分的音差，同样五度相生律的小半音——86音分与平均律小二度100音分也形成一个14音分的音差。所以，14音分是平均律与另两律特性音程之间的“公差”，将此“公差”输入到十二平均律中去，使平均律的十二个音都具有向上或向下发生14cent变

<sup>17</sup> 李曙明“弹性十二平均律”著于《天人乐舞》的“乐律学篇”中，敦煌文艺出版社（1999年11月第一版），第218页

化的弹性，这样就使三律协调为一个新的统一体了，形成了一个新的音律体系，即“弹性十二平均律”。

弹性十二平均律用公式表达为： $12^{\sqrt[12]{2}} \pm 14\text{cent}$

“12”表示十二律；“ $12^{\sqrt[12]{2}}$ ”表示十二平均律的半音律关系；“ $\pm 14\text{cent}$ ”表示十二律音的第一个律均可发生向上或向下的14cent的音高变化。

### 复频弹性十二平均律

<sup>18</sup> “复频”之义指一个音由相差2音分的两个频率共同构成的律。简单地说就

$$\left\{ \begin{array}{c} +2 \\ 0 \\ -2 \end{array} \right. \text{cent}$$

是指一个音两个Hz，这两个音同时发声。其律式为：

为副频。主频音与相应的国际标准完全相同；副频音高主频音2音分。“2音分”相当于一个平均律半音的2/100；又是五度相生律和纯律共有的纯五度702音分与平均律纯五度700音分之公差，亦称“小微音差”或“斯基斯马”，它具有同律音变换功能（见后具体分析）。

“复频弹性十二平均律”的“弹性”是指“复频”之弹性，即指“由相差2音分的两个频率共同构成的律（音），在运动中应能具有的两种（或升或降）以14音分为标准常数的随机伸缩机能。”

$$\text{其律式为： } \left\{ \begin{array}{c} +2 \\ 0 \\ -2 \end{array} \right. \text{cent} \cdot \left\{ \begin{array}{c} +14 \\ 0 \\ -14 \end{array} \right. \text{cent} \cdot 12^{\sqrt[12]{2}}$$

其中， $\left\{ \begin{array}{c} +2 \\ 0 \\ -2 \end{array} \right. \text{cent}$ 是具有五度相生律性质的复频； $\left\{ \begin{array}{c} +14 \\ 0 \\ -14 \end{array} \right. \text{cent}$ 是具有纯律性质的弹

性； $12^{\sqrt[12]{2}}$ 是十二平均律。

复频弹性十二平均律就是三律的结合，是自古以来人们对单一律制的审美局限的革新，即把三律用复频和弹性的理念整合融合在一起，用简易合理的方式完成了对三律的变通综合，形成了一个既有向心美，又有和谐美、转调自由美之新律，可以说是对三律的“优生”。正如老子所说的“道生一，一生二，二生三、三生万物……”。

在钢琴音响中就包涵着复频弹性十二平均律的构律元素，因此，在一定的意义上可以认为复频弹性律是对钢琴律学内涵的描述，为揭示出钢琴丰富的音响现象，提供了新的理论基础。

<sup>18</sup> 李曙明“复频弹性十二平均律”著于《天人乐舞》的“乐律学篇”中，敦煌文艺出版社（1999年11月第一版），第251、252页

## 钢琴的三律蕴涵

钢琴并非是单一的十二平均律乐器，其音响纵横结构是以十二平均律为主干兼有纯律、五度相生律在内的“三律”蕴涵的乐器。它有多变的和声色彩以及与此相关的丰富多彩的“律学”蕴涵。

根据钢琴基音“偏差音”曲线来调律，我们听到调律音准的钢琴黑白键（仅小字一组）所发出的音响是十二平均律的高音关系，即半音之间均为 100Ccent（音分），12 个半音关系构成一个纯八度音程，共计 1200 音分。从音响物理学视角审视，并将钢琴的基音与倍音看作一个整体音响系统，就会发现整个钢琴音域中以十二平均律为基体的钢琴音响，不但有纯律之音响元素与之协同存在，而且有五度相生律的音响元素与之协同存在。钢琴确有三律蕴涵。

钢琴共有 88 个键，所对应的琴弦全长即 1/1，所发出的乐音是基音。但琴弦不仅以全长 1/1 的方式振动，它还由自然法则决定，必然以琴弦全长的 1/2、1/3、1/4、1/5、1/6……等规律振动（这就是通常所说的“泛音”即倍音），倍音即是高于基音频率二倍、三倍、四倍、五倍、六倍……之音。基音与倍音协同振动，是造成钢琴音律复合的根本原因。

例：钢琴基音的“纯五度”音程为 700 音分，倍音的纯五度为 702 音分，二者相差 2 音分；基音的大三度音程为 400 音分，倍音的大三度音程为 386 音分，二者相差 14 音分。这二种音差，即 2 音分与 14 音分之音差正是造成钢琴音律复合（即三律蕴涵）具有本质意义的音差。因此，“弹性十二平均律”、“复频弹性十二平均律”的研究，揭示了这两种律差的存在，同时利用这两种律差提出了合“三律”为一律的数学模型。在这种意义上可将钢琴视其为当代律器。

### 1、 钢琴音响十二平均律与纯律之音响复合：

如果我们把平均律看作无理数等比律制，那么我们就可以将纯律看作自然数非等比律制，平均律与纯律之复合即可被看作无理数与自然数的协同，这种协同是钢琴音响丰满富丽的数理原因，也是音乐的“美的数学”特征的具体体现。

平均律与纯律之复合，如：平均律的大三度 400 音分，但平均律自然泛音形成的大三度是 386 音分属纯律特色，因此平均律基音奏响的大三度同时也伴随着泛音纯律大三度的鸣响，这就是平均律与纯律音响之复合。

在五度之间，由于大三度的插入，必然造成一个纯律小三度 316 音分，因此又出现平均律与纯律之间的小三度的复合

众所周知，大小三度及其转位是一切种类的大小三和弦大小七和弦乃至九和弦、十一和弦等更高序数和弦的结构基础，就基音与泛音的同时客观协同存在而言，我们可以认为，钢琴音乐音响中的一切三、六度和音，特别是一切以三度叠置原则而建构的和弦，都实际上是平均律与纯律大小三度（及其转位大小三六度）的复合。因此钢琴进入听觉的和声、和音、和弦现象，在本质上必然是平均律与纯律的复合。

人类通过几千年的探索，发明了平均律，使之能够满足人类的转调自由的需要。从一音域的基音之间的关系的视角看，这似乎以牺牲三度、五度（以及转位六、四度）的自然纯正和谐为代价，但在钢琴基音与倍音的音响系统中却因基音与倍音的必然协同得到了某种弥补。

钢琴和声的音律复合的确是“人工”与“天工”的巧妙融合，令人叹为观止。

## 2、钢琴音响十二平均律与五度相生律的复合：

平均律的五度是 700 音分，五度相生律的五度是 702 音分，由此分析平均律与五度相生律五度的复合情况。

每次高 2 音分，故 12 次相生后高于原音 24 音分（即  $\sharp b$  高于  $c^1$  24 cent）。

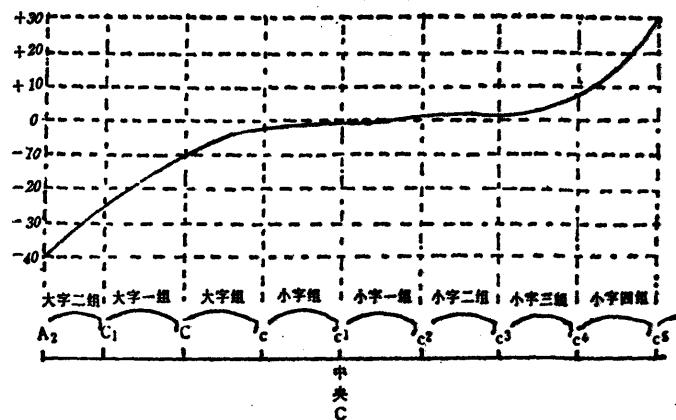
由于平均律五度 700 音分的作用，钢琴上所呈现出的五度相生过程，则既包含 702 音分的五度相生律五度音响，又包含 700 音分的平均律五度音响，“复频”原型而且可以“黄钟还原”。这可视为又一个音律之“天工”与“人工”巧妙融合的结构。

根据以上的概略“描述”，初步得出结论：从总体上说，遵循当代国际调律规范的钢琴是蕴涵“三律”——平均律、纯律、五度律的音响系统（或者说钢琴音响是一个纵横立体的音响系统存在），其平均律的存在方式是基音之间关系，协同着平均律存在的纯律与五度相生律，主要是大三度（小三度以及大小三度的转位）和纯五度（纯四度）之间的关系。因此我们有理由认为，钢琴音响基本是以平均律为基本框架蕴涵“三律”的键盘乐器。无论是基音还是泛音都存在着三律因素，蕴涵着三律音响。下面对钢琴基音和泛音的三律蕴涵存在方式，加以分析论证。

## 九、钢琴基音“偏差音”对照表分析

根据美国声学家罗辛的钢琴基音“偏差音”曲线图本文作者绘制了“偏差音”音分频率对照表（即钢琴基音“偏差音”对照表）。按照横向基音超八度的思维方式，即把标准的音分值音组和偏差值的音分值音组看作是在一个八度内的两个音，进行比较、运算、分析，可以看出不同音分值的音差，以及同时这些音差所蕴涵着三律性质，可以看出 88 个音奏响的每一组基音频率（指单频）不只是均等的十二平均律的频率值，而是出现了不同程度的“偏差”现象，从律制上看有的属于的五度相生律（ $\pm 2$ ）性质的偏差音；有的则属于纯律（ $\pm 14$ ）性质的偏差音。这样从基音“偏差音”曲线上就反映出了钢琴音响的实际基音是蕴涵三律的（是在超八度的方式中存在着），即“钢琴基音的三律并存”。具体分析如下：

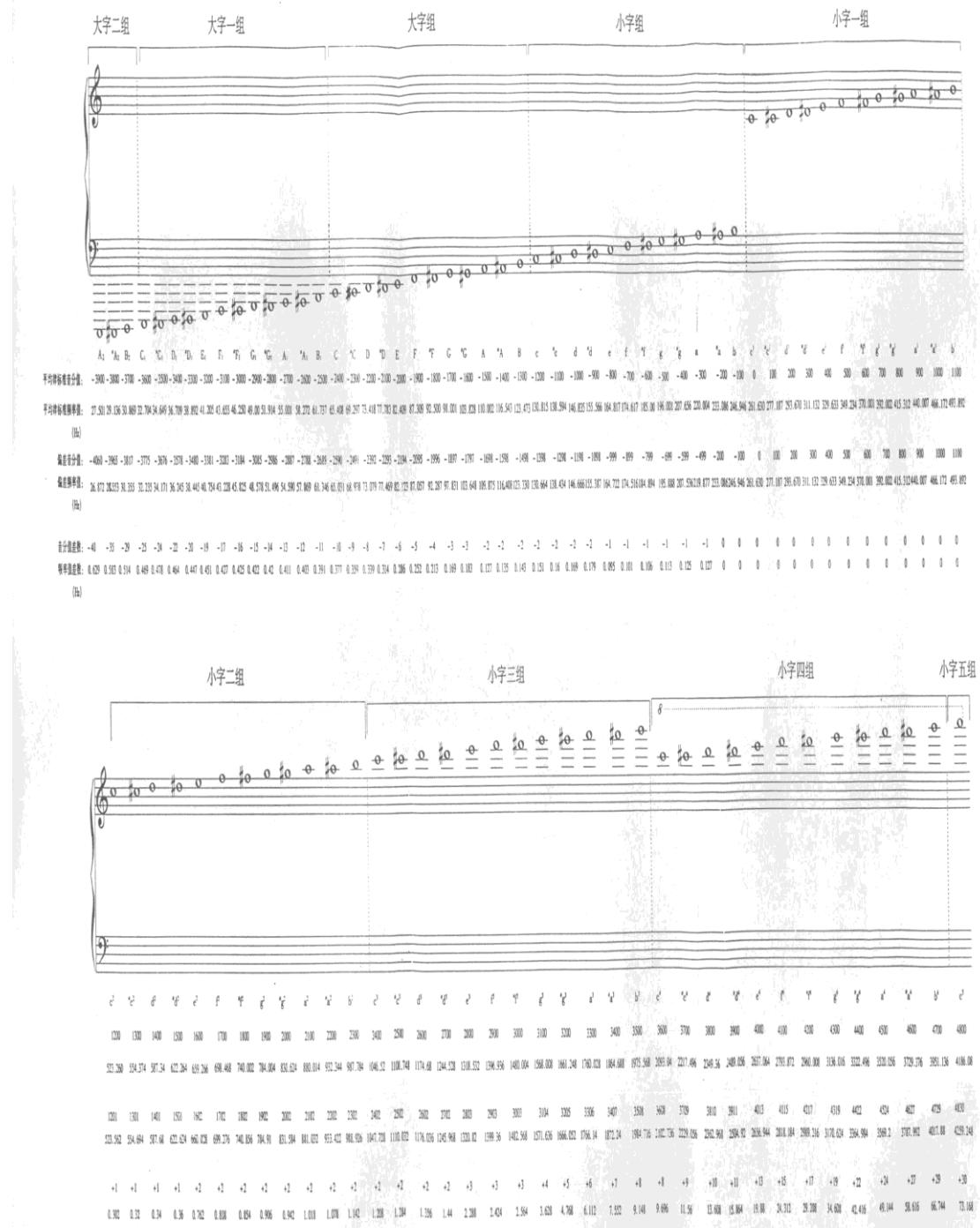
附：“钢琴基音‘偏差音’曲线图”和“钢琴基音‘偏差音’对照表”



19 缪天瑞《律学》人民音乐出版社（1996 年第三次修订版），第 293 页

### 钢琴基音“偏差音”对照表

图解“两会”精神



## 1. 从宏观上分析偏差音音差区间的特点:

“偏差音”从小字一组的平均律音分值向高低音组开始扩张:

经过一组的扩张, 偏差音分值在(±1—2)区间, 形成反向小字组与小字二组的偏差音分值的一定对应关系;

再向外扩张一组(即大字组和小字三组)比较, 偏差音分值约在(±2—10)区间, 形成这两组的偏差音分值的一定对应关系;

继续向外扩张(即大字一组、大字组与小字四组、小字五组)比较, 偏差音分值约在(±8—40)区间, 形成这两对组的偏差音分值的对应关系。

从以上偏差音分值的扩张可以看出, 从中间音组向外音组扩张的音分值的偏差越来越大, 低音越来越低, 高音越来越高, 最低音比最高音偏差的音分值更大, 两极偏差音和为70音分(即A<sub>2</sub>—c<sup>5</sup>), 也就是说整个88个音的偏差音幅度有70个音分, 相当于一个纯律小半音71音分的音分值; 从七个八度C<sub>1</sub>—c<sup>5</sup>的偏差音来看, 有55个音分的幅度(即C<sub>1</sub>25+c<sup>5</sup>30=55), 相当于一个1/2纯律大半音56音分的音分值(纯律大半音为112音分÷2=56音分)。

## 2. 从微观上分析偏差音的性质:

1) 首先, 以小字一组作为对照标准, 这组各音之间的音分值相等, 没有出现偏差音, 所以属于十二平均律的性质。

2) 以每组音C来看, 从小字一组向高低音组扩张:

C的偏差音分数成倍数关系,(都可被2整除)。如:

各组C音的偏差值为:

偏差值:	(-40)	—	-25	—	-10	—	-2	—	0	—	1	—	2	—	8	—	30
音组:	(A <sub>2</sub> )	C <sub>1</sub>	C	c	c <sup>1</sup>	c <sup>2</sup>	c <sup>3</sup>	c <sup>4</sup>	c <sup>5</sup>								

各音组的偏差音值为:

偏差值:	-14	—	-8	—	-2	—	0	—	2	—	6	—	21
音组:	C <sub>1</sub>	C	c	c <sup>1</sup>	c <sup>2</sup>	c <sup>3</sup>	c <sup>4</sup>						

分析: 从以上两个偏差音分值来分析, 越向低音越低, 越向高音越高, 低音与高音偏差的音分值有一定的对应性。其偏差值分别具有五度相生律和纯律的音程性质。

如: -10音分的偏差, 意味着平均律大三度400-10=390, 接近于386音分的纯律大三度, 属纯律性质; 或100-10=90, 属于五度相生律小半音90音分;

如: +2音分的偏差, 意味着平均律纯五度700+2=702, 属于五度相生律和纯律的纯五度性质; -2音分的偏差, 意味着平均律纯四度500-2=498, 也属于五度相生律和纯律的纯四度性质;

如: +6音分的偏差, 意味着平均律大六度900+6=906, 属于五度相生律的大六度性质;

如: -14音分的偏差, 意味着平均律小六度800+14=814, 属于纯律的小六度性质。

如: +8音分的偏差, 意味着平均律大三度400+8=408, 属于五度相生律的大三度性质。等等。

从整个基音“偏差音”对照表来具体分析五度相生律音程性质的存在。如下，五度相生律的主要音程：

① 五度相生律的纯五度 (702cent)、纯四度 (498 cent)

如，小字组的  $d (-2)$  与标准  $d^1$  偏差 2 个音分，按照超八度思维方式是：

$d (-2) \rightarrow a^1$  (实际超 1 个八度)  $700+2=702$  cent,  $d$  音低 2 个音分，也就是音程距离拉宽了，就为 702 cent。

再如，超八度思维方式  $\#d (-2) \rightarrow \#a^1$ 、 $\#c (-2) \rightarrow \#g^1$ 、 $a^1 \rightarrow e^2 (+2)$ 、 $b^1 \rightarrow \#f^2 (+2)$  等都是同样偏差音在平均律纯五度基础上多了 2 个音分， $700+2=702$  cent，即为五度相生律的纯五度，转位为纯四度 ( $1200-702=498$  音分)。见下：( $d$ )  $d^1 \rightarrow a^1$  转位  $a^1 \rightarrow d^2$

A musical staff with two measures. The first measure shows a note at position  $d (-2)$  followed by a note at  $a^1 (0)$ , labeled '(五度律纯五度)' (Pure Fifth of Pythagorean Tuning). The second measure shows a note at  $d^1 (-2)$  followed by a note at  $d^2 (-2)$ , labeled '纯五度 702' (Pure Fifth 702 cents). The third measure shows a note at  $a^1$  followed by a note at  $d^2 (-2)$ , labeled '纯四度 498' (Pure Fourth 498 cents).

$$1200+700+2=1902 \rightarrow 1902-1200=702 \text{ (纯五度)} \text{ 转位: } 1200-702=498 \text{ (纯四度)}$$

② 五度相生律大三度 (408cent)、小六度 (792 cent)

如，大字组  $D (-8)$  与标准小字一组的  $\#d^1$  偏差 8 个音分，按照超八度的思维方式是： $D(-8) \rightarrow \#f^1$  (实际超 2 个八度)  $400+8=408$  cent，即大字组 D 低 8 个音分，也就是音程距离比标准大三度  $f^1$ (400)更宽了，所以  $400+8=408$  cent，即为五度相生律的大三度，转位为小六度 ( $1200-408=792$ )。见下：( $D$ )  $d^1 \rightarrow \#f^1$  转位  $\#f^1 \rightarrow d^2$

A musical staff with three measures. The first measure shows a note at  $D (-8)$  followed by a note at  $\#f^1 (0)$ , labeled '(五度律大三度)' (Major Third of Pythagorean Tuning). The second measure shows a note at  $d^1 (-8)$  followed by a note at  $\#f^1$ , labeled '大三度 408'. The third measure shows a note at  $\#f^1$  followed by a note at  $d^2 (-8)$ , labeled '小六度 792' (Minor Sixth 792 cents).

$$2400+408=2808 \rightarrow 2808-2400=408 \text{ (大三度)} \text{ 转位: } 1200-408=792 \text{ (小六度)}$$

③ 五度相生律小三度 (294cent)、大六度 (906cent)

如，大字组  $E(-6)$  和标准小字一组  $\#e^1$  偏差 6 个音分，也就是比标准小三度  $c^1(300)$  音程距离缩近了，窄 6 个音分，按超八度思维方式为： $\#c^1 \rightarrow E(-6)$  (实际超 2 个八度)  $300-6=294$  cent，即为五度相生律的小三度，转位为大六度 ( $1200-294=906$ )。

见下： $\#c^1 \rightarrow (E) e^1$  转位  $e^1 \rightarrow \#c^2$

A musical staff with three measures. The first measure shows a note at  $\#c^1 (0)$  followed by a note at  $E (-6)$ , labeled '(五度律小三度)' (Minor Third of Pythagorean Tuning). The second measure shows a note at  $\#c^1$  followed by a note at  $e^1 (-6)$ , labeled '小三度 294'. The third measure shows a note at  $e^1 (-6)$  followed by a note at  $\#c^2$ , labeled '大六度 906' (Major Sixth 906 cents).

$$2400+ (300-6) =2694 \rightarrow 2694-2400=294 \text{ (小三度)} \text{ 转位: } 1200-294=906 \text{ (大六度)}$$

④ 五度相生度大二度 (204cent)、小七度 (996 cent)

如，大字组 $\sharp F(-4)$ 与标准小字一组的 $\sharp f'$ 偏差 4 个音分，也就是音程距离比标准大二度 $\sharp g^1(200)$ 增宽了 4 个音分，按超八度思维方式为： $\sharp F(-4) \rightarrow \sharp g^1$  (实际超 2 个八度)  
 $200+4=204$ cent，即为五度相生度大二度，转位为小七度 ( $1200-204=996$ )。

见下：( $\sharp F$ )  $\sharp f' \rightarrow \sharp g^1$  转位  $\sharp g^1 \rightarrow \sharp f^2$



$$2400+200+4=2604 \rightarrow 2604-2400=204 \text{ (大二度)} \text{ 转位: } 1200-204=996 \text{ (小七度)}$$

⑤ 五度相生律小二度 (90cent)、大七度 (1110 cent)

如：小字四组 $\sharp c^1(+9)$ 归属于 $+10$ 的性质)与标准小字一组的 $\sharp c^1$ 偏差 10 个音分，也就是低音高了 10 音分，与上方二度  $d^1$  构成的音程距离缩小了，按超八度思维方式为： $\sharp c^1 (+10) \rightarrow d^1$  (实际超 3 个八度)  $100-10=90$ ，即为五度相生律小二度，转位为大七度 ( $1200-90=1110$ )。见下：( $\sharp c^1$ )  $\sharp c^1 \rightarrow d^1$  转位  $d^1 \rightarrow \sharp c^2$



$$3600+(100-10)=3690 \rightarrow 3690-3600=90 \text{ (小二度)} \text{ 转位: } 1200-90=1110 \text{ (大七度)}$$

以上从钢琴基音“偏差音”曲线对照表中分析出属于五度相生律性质的主要音程，从这几个主要音程中可以看出并证实钢琴的基音也是具有五度相生律音响性质的存在的。

3) 下面依对照表列举分析钢琴基音具有纯律偏差音音程性质的存在。

最主要的纯律音程，即：纯律大三度 386cent 和纯律小三度 316cent。

① 纯律大三度 (386cent)、小六度 (814 cent)

如，大字组的 $\sharp G_1(-14)$ 与小字一组标准的 $\sharp g^1$ 偏差 14 音分，即与  $e^1$  构成大三度音程距离就缩小了，按超八度思维方式表示： $e^1 \rightarrow \sharp G_1(-14)$  (实际超 3 个八度)  
 $400-14=386$ ，即纯律大三度，转位为小六度 ( $1200-386=814$  cent)。

见下： $e^1 \rightarrow (^{''}G_1) ^\# g^1$  转位  $^\# g^1 \rightarrow e^2$



$$3600 + (400 - 14) = 3986 \rightarrow 3986 - 3600 = 386 \text{ (大三度)} \text{ 转位: } 1200 - 386 = 814 \text{ (小六度)}$$

## ② 纯律小三度 (316cent)、大六度 (884 cent)

纯律纯五度和五度相生律纯五度音分值相等都是 702cent，用纯律纯五度-纯律大三度=纯律小三度，即  $702 - 386 = 316$  cent (纯律小三度)。见“偏差音”对照表的“ $F_1$ ”与标准小字一组的  $a^1$  偏差 16 音分 (实际超 3 个八度)，含有纯律小三度的性质，转位为小六度 ( $1200 - 316 = 884$ )。见下： $(^{''}F_1) ^\# f^1 \rightarrow a^1$  转位  $a^1 \rightarrow ^\# f^2$



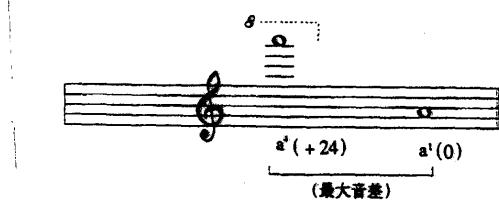
$$3600 + (702 - 386) = 3916 \rightarrow 3916 - 3600 = 316 \text{ (小三度)} \text{ 转位: } 1200 - 316 = 884 \text{ (大六度)}$$

4) 此外在钢琴基音“偏差音”对照表中也有五度相生律的“最大音差 24cent”和纯律的“普通音差 22cent”的存在。分析如下：

① 五度相生律“最大音差 24 音分”：是从一个音开始按五度相生 12 次（每次多 2 音分） $\times 2$  而得的 24 音分差；在五度相生律中大半音 (114) 和小半音 (90) 也相差一个最大音差 24 音分。

例，“偏差音”表中相差 24 音分的有：小字四组  $a^4(+24)$  与小字一组标准  $a^1(+0)$  按超八度方式多了 24 音分，即  $(a^4)924 - (a^1)900 = 24$  cent. 这是钢琴在三个八度之间出现了五度相生律的最大音差。

如下： $a^4 \rightarrow a^1$



$$924 - 900 = 24 \text{ cent}$$

再例：“偏差音”表中大字一组 $\sharp C_1$ (-24)与小字一组标准 $\sharp C^1$ (+0)按超八度方式多了24音分，即 $(\sharp C_1) 124 - (\sharp C^1) 100 = 24 \text{ cent}$ .

如下： $\sharp C_1 \rightarrow \sharp C^1$



$$124 - 100 = 24 \text{ cent.}$$

还有，从两个偏差音本身之间也可找出五度相生律的“24音分最大音差”。

如：大字二组的 $A_2$ (-40)与大字一组的 $F_1$ (-16)之间的音差值为24，即 $40 - 16 = 24 \text{ cent}$ ;

大字二组的 $A_2$ (-40)与大字一组的 $G_1$ (-15)之间的音差值为25，即 $40 - 15 = 25 \text{ cent}$ ，接近于24音分，也属于“五度相生律的最大音差”，等等。凡是在“偏差音”表中接近于(±)24音差的音程都属于“五度相生律最大音差”。

② 纯律“普通音差22音分”：是纯律两个大二度音差为22音分，也就是说，同样是全音，但它们之间的音程关系并不一样，如c-d音分值为204，而d-e音分值为182，之差为： $204 - 182 = 22 \text{ cent}$ 。

凡是在“偏差音”表中接近于(±)22音差的都属于“纯律普通音差”。

见“偏差音”图表：大字一组的 $D_1$ (-22)和小字四组的 $\sharp g^1$ (+22)与小字一组的标准 $d^1$ (0)和 $\sharp g^1$ (0)偏差22音分；

还有，从两个偏差音本身之间也可找出纯律22音分或接近于22音分的“普通音差”：

如，大字二组的 $A_2$ (-40)与大字一组的 $E_1$ (-19)、 $F_1$ (-17)两者之间的音差值为： $40 - 19 = 21 \text{ cent}$  和  $40 - 17 = 23 \text{ cent}$ ，都接近于22cent，因此也归属于纯律“普通音差22音分”。(见“偏差音”表)

由此总结出，“偏差音”曲线对照表中：

- ① 凡是接近于(±)14音分(包括13、14、15cent)的兼有纯律与五度相生律音差性质(即纯律大三度386cent和转位小六度814cent，以及五度相生律大半音114cent)；
- ② 凡是接近于(±)16音分(包括15、16、17cent)的属于纯律音差性质(即小三度316cent和转位大六度884cent)；
- ③ 凡是接近于(±)4音分(包括3、4、5cent)的属于五度相生律和纯律音差性质(即大二度204cent和转位小七度996cent)；

- ④ 凡是接近于(±)10音分(包括9、10、11cent)的属于五度相生律音差性质(即小二度90cent和转位大七度1110cent);
- ⑤ 凡是接近于(±)2音分(包括1、2、3cent)的属于五度相生律音差性质(即纯五度702cent和转位纯四度498音分);  
其中有精确度高的音程,亦有高近似值的音程。

综上所述,从钢琴的基音“偏差音”曲线对照表的分析中可以揭示出钢琴的基音是在超八度的方式中存在着三律的各种音程,即钢琴音响三律并存。

但在这里也值得注意的是:钢琴之所以称之为“平均律乐器”也有它特殊的存在方式。我们观察钢琴基音的“偏差音”曲线表,从每个音组独立来看它的偏差音分值,相邻两音之间的差数比例几乎是相等的1:1,所以,从这个角度也可称之为“相对平均律乐器”。

现代钢琴利用蕴涵三律特征“偏差音”来进行钢琴调律,这样的钢琴音响才会更丰富更遵循自然更和谐更好听。

## 十、钢琴泛音表分析

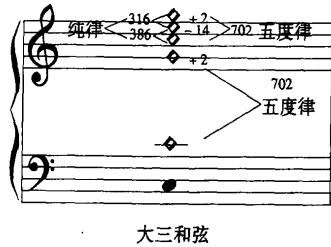
钢琴的音响从纵向分析(见下表:钢琴大字组泛音表),看其泛音的结构,每一个音的第二谐音到第六谐音,所产生的纯五度、大三度、小三度的音分值和频率都包含五度相生律和纯律的性质。如下:

### 钢琴大字组泛音表



从基音来看，无论是标准音分值还是偏差音分值每个音都属于“单频”律学的思维概念；而从泛音的概念来看，每个音的弦振动的倍音都产生了偏差音的音分值和频率值，也就是说每个音纵向来听，不只是一个音在响，而是许多个音的结合。

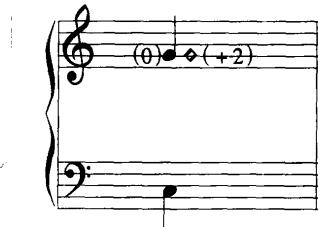
从泛音列的第二到第六谐音分析，第二和第三谐音产生的纯五度（C—G=702cent）比实际钢琴基音的纯五度（700cent）要高2个音分，这属于五度相生律的音差性质。而泛音列中第四和第五谐音产生的大三度（C—E=386cent），比实际钢琴基音大三度（400音分）少14音分，这属于纯律大三度的音差性质；“14音分”也是五度相生律大半音114音分与平均律半音100音分的音差值。见下表：



从上表中可以看出泛音列中产生的大三和弦：纯五度的五音要高2音分（即702cent）是五度相生律的纯五度；大三度的三音要低14音分（即386cent）是纯律的大三度。

所以，从这个复合音（基音+泛音）可以总结出，钢琴的纵向音响（即泛音音响）也包涵三律特征，即钢琴的音响不仅仅是单频的音响，而是，在泛音中具有五度相生律(+2)复频的音响和纯律(-14)弹性音差的变化。如下：

- ① 钢琴基音之间也存在着复频，如，基音c与g<sup>1</sup>同时鸣响时，c的泛音g<sup>1</sup>就高于实音g<sup>1</sup>2音分，形成了0与+2的复频. 例：



- ② 小提琴与钢琴合作时，小提琴的空弦音也常常高于或低于相应的钢琴实音2音分，形成复频，例：



- ③ 声乐和钢琴合作时，例如钢琴伴奏弹出一个大三和弦时，声乐唱出该和弦的五度音比钢琴实音高出 2 音分或低 14 音分的复频与弹性，如：尚德义的声乐作品《牧笛》开头引子



以上这 2 音分与 14 音分的音差是根据人们审美需求自然形成的，在钢琴与管弦乐的协奏中，2 音分与 14 音分之差也更是司空见惯了，他不但未造成非审美冲突，而且常常增加着审美效果。

总结，从上述两个图表，即“钢琴基音‘偏差音’图表”和“钢琴泛音图表”的宏观、纵横分析中更详细更准确的证实了钢琴音律无论是基音还是泛音都蕴含着三律的音响特征。也更证实了钢琴之所以有“乐器之王”著称，不但因为它有广阔的音区、宏大的音量、自由的转调等因素外，更重要的是它还具有丰富的和声音响以及丰富的音律蕴涵。

## 第三章

### 一、钢琴三律并存的教学实践意义

“复频弹性十二平均律”之研究，是新时代的新的音乐审美要求，是对新的律制诞生呼唤之回应，而“三律并存”钢琴的音律复合结构就是这种新律制的建构雏形。

从实践方面说，钢琴的平均律基音，纯律大小三度之倍音、纯五度倍音，为音乐听觉的训练提供了一个准确可感的基础，也是我们进行三律音乐听觉训练最方便最实际的音乐律学器具。在视唱练耳教学中，提出充分利用钢琴的三律蕴涵，让学生在钢琴上掌握三律的课题，应该提到我国音乐教育的日程上了。

#### 钢琴三律听唱训练

钢琴以十二平均律制构成，因此只要弹响钢琴的基音（自然音与变换音）跟着模唱，反复练习便可唱准、唱好。而纯律和五度相生律就不那么容易了，它要靠听（奏）、算、思、辨、别等“心—音”，“数—美”相互反馈，互动之过程，才能逐渐把握。

#### 1、十二平均律的训练：

十二平均律的特征在于半音之间的完全等比，小二度 100cent（音分），大二度 200cent，小三度 300cent，大三度 400 cent，纯四度 500cent 等等，以此类推，纯八度为 1200cent，掌握大小二度就等于掌握了这一音律体系的全部过程。

我们运用听觉，分析、构唱、模唱、单一音程练习，如大二度，在练习视唱或听大二度音程时，首先要听到钢琴的音响，反复聆听与轻声模唱，对平均律大二度的色彩有了内心音响积累，轻唱二度其中的一个音，在唱的过程中，将心中积累的另一个再轻唱，之后用钢琴音响核证是否正确，反复练习，反复对照，经过无数次音响信息反馈，形成内心音高意象。不管在任何一个音上构成大二度，虽然高低不同，但大二度两音之间的音分关系是完全一样的，任何位置上的大二度音分关系都一样宽的感知形成后，平均律的大二度练习也就成功了。小二度，也是用同一方法练习，只要把十二平均律的小二度两音之间的 100cent 的感知掌握（比大二度少 100cent），在心中有了音高意象。大二度与小二度意象确定后，我们认为十二平均律的所唱问题就解决了，其它的音程只是增 100cent 或 200cent 的问题，不管增减只要对大小二度有认识十二平均律的训练就容易多了。

#### 2、五度相生律的训练：

五度相生律的精华在于它的纯五度是 702cent 的构律元素。以及由此元素相生而得成的 114cent、90cent 两种小二度的存在。五度相生律的音列、音程、音阶皆从这个纯五度之连续“上五下四”循环相生而来，由于它的构律元素不是 700cent 之平均律五度，所以五度相生律之 “C ≠ D”、“D ≠ E”、“F ≠ G”……。五度相生律与十二平均律的纯五度有 2cent 之差，因此五度相生律的训练就不能依据钢琴基音，而应当听到钢琴基音上方的第二和第三倍音之音的关系。二、三倍音之间的关系即是 702cent 纯五度。纯五律音程掌握，是五度相生律最基本要素，同时还要掌握自然泛音列的纯五度，弹响钢琴大字组“C”，反复、仔细倾听，听到小字组 G 和小字一组的“C”（泛音）的高音响，它们分别略高于钢琴的同时（2 音分），这即是 702cent 的纯五度，用此纯

五度和钢琴十二平均律纯五度加以比较，清楚的认识到它们之间的差别，本质上就基本掌握了五度相生律的纯五度，依次上下相生可得五度相生律的一切音程。

### 3、 纯律的训练：

纯律，又称自然纯正律或自然律，就是以四倍音，五倍音，六倍音为构律元素，以和弦整体的方式上下相生而生。纯律的大三和弦根音至三音的音分数是 386cent，三音到五音是 316cent，根音到五音 702cent，而平均律大三度是 400cent，根音到五音是 700cent。

纯律的训练主要集中在 386 cent (大三度) 与 400cent(平均律大三度)之间的区别上，区别就在于相差 14 音分 (弹律音差)，它具有至关重要的意义，因为这个音分数正是变通三律的关系和枢纽，掌握了这个大三度 386cent，也就是掌握小三度 316cent 奠定了基础。它的转位小六度也就随之掌握，我们将纯律训练集中在三，六度上，首先进行大三度训练听唱。

训练方法：弹响钢琴大字组 C，在听觉中跟着捕捉找到第四，第五倍音，即是纯律 386 音分的大三度，反复训练捕捉泛音的听觉能力，奠定内心音高感觉，将纯律大三度 386 cent 和十二平均律大三度 400cent 进行对比，把握 14 音分的“弹性音差”，通过各种调式的音程训练，达到熟练地掌握纯律音程，和声概念。

### 4、 三律综合变通训练：

在音乐实践活动中，我们深深体会到，音乐的旋律、和声、转调，是需要时常合理转换变通音律，重唱、合唱、重奏、合奏尤应如此。仅用一种音律是不能满足音乐各种需要。我们用律的训练常规是以十二平均律为轴，“复频弹性十二平均律”的 14cent 为“金钥匙”根据音乐的变化、发展、表现为调整音律，使三律融合变通为一个有内在联系的数理审美系统。

我们可以选用一些优秀的中外音乐作品，尤其是一些民族音乐或民歌作品，让学生通过实践听、唱（奏），真正达到三律变通灵活作用的理性与感性认识的统一。

钢琴的平均律的基音，五度相生律纯五度倍音，纯律大三度倍音，为音乐听觉和训练提供一个准确可感的基础，也是我们进行三律音乐听觉训练最方便，最实际的音乐工具，利用钢琴存在的三律复合现象，掌握三律及其应用的方法，将会奠定音乐表演艺术审美的自然基础，它的基本要求是严格性、数理性、必然性，但允许一定的模糊性、可变性、偶然性。简言之即数理精确性与审美自由性的辩证统一。

我国的视唱练耳教学大都以钢琴为器具进行单一的十二平均律的训练。

发现利用钢琴三律蕴涵进行三律听唱，将视唱练耳注入律学内容，应能普遍提高人们的音乐听唱（奏）能力，以及音乐表演的音律音准水平。

## 二、钢琴调律——运用“偏差音”曲线

### (一) 钢琴的调律

钢琴按十二平均律调音为主。在钢琴的整个音域中，每一个八度都分成十二个均等的半音，每个半音之间的振动数比值都相等，所以十二平均律又称“十二等律”也叫“等比律”。如果用音分说明的话，每个八度为1200音分，每个半音为100音分，所有的八度及半音都是相同的。

无可讳言，十二平均律虽然解决了旋宫转调的难题，但是这一人工律制同纯律音程相去甚远，所奏的和弦必然远不及纯律协和。正因为这个缘故，所以有经验的钢琴调音师在为钢琴调音时，就自然而然地给钢琴各音之间的音程关系作一点微小的技术处理。在调钢琴的音时，先在一个八度之内把八度都调准，而且必须把半音的间隔都调得合于十二平均律。通用的调音法是：根据十二平均律原则“上五下四，五度变窄，四度变宽”（因为自然律<sup>③</sup>的五度相生律和纯律的四、五级音的音分都相同，四级=498音分；五级=702音分，这与十二平均律的“等比律”要相差上下2个音分）：即先从a<sup>1</sup>音(440Hz)下生低八度a音(220Hz)，继续从a音下生一个十二平均律的大三度f音(400音分)；再从f音出发上生纯五度c<sup>1</sup>音(这时自然律的纯五度音级c<sup>1</sup>=702音分，要调窄2音分：702-2=700音分，因为平均律中半音音分都为整数，纯五度有7个半音，一个半音=100音分，那么7×100=700音分)，即“上五”；再从c<sup>1</sup>音下生纯四度g音(g=498音分，要调高2音分：498+2=500音分)，即“下四”，如此上下相生，最后回到十二平均律的a<sup>1</sup>音才会相对准确。

### (二) 音准的听辨

调钢琴的音律，主要依靠听觉，听什么呢？概括地说，就是听拍音和音程。

拍音是两个振幅大体相同，频率相近的音波合声后，其合成音波的振幅会发生周期性的强弱变化，这种现象就叫做拍，它所发出的声音就叫拍音。比如：两根琴弦中，有一根弦每秒钟振动440次，另一根弦每秒钟振动436次，这两根弦同时发音时，每秒钟就会出现4个拍音(即440-436=4)。

(“音分值和频率对照表”可派用场见本文P.52—P.96)

钢琴调律常用的音程是同度、八度、四度和五度。我们不但应该从理论上懂得这几种音程的特征，而且还应从听觉上掌握其音响特点。也就是说，我们调音用的耳朵既是音乐的耳朵，也是物理的耳朵，调音是靠听拍音来判断音程是否准确。一般来讲，听同度、八度比较容易，而听四度和五度就比较难了(因为上文已陈述过四度=498音分、五度=702音分，比钢琴上的十二平均律大音阶的四级五级音则上下相差2音分。2音分仅及十二平均律半音的1/50，等于小微音差，因此不易为人耳所觉察。)。

在上述这些音程关系中拍音是怎样表现的呢？

同度：同度完全调准时没有拍音，因为同音组的两根或三根弦的频率完全相等。

但是如果同音弦组中某根弦振动的频率与其它弦振动的频率不一致时，就会出现拍音。调同度时，必须完全消除拍音。

八度：八度是同度的转位，八度中低的一个音的第二谐音与高的一个音的第一谐音(基音)音高相同，所以八度调准了也没有拍音。

五度：根据十二平均律的特点，凡是纯五度都应比五度相生律和纯律的纯五度调得窄一点(-2音分)。根据律学原理，五度相生律和纯律的纯五度的频率比为2:3，即为702音分(自然律中纯五度是由第二分音和第三分音构成)。例如：a的频率为220次/s，它的上方五度音 $e^1$ 频率就是 $220 \times 3/2 = 330$ 次/s，而十二平均律的 $e^1$ 频率却是329.63次/s，就是说平均律的纯五度音程比纯律和五度相生律的纯五度稍窄一点。根据同样的律学原理，平均律的四度要比五度相生律和纯律的纯四度稍宽一点(+2音分)。

### (三) 运用“偏差音”曲线调律

钢琴的音律全部调准后，弹奏起来，会给人一种美感，听起来很舒服，这是钢琴各音谐和纯正的关系在听觉上的正常反映。准与不准的标准是以人的正常感受和自然规律相符合的，即遵循于钢琴基音的“偏差音”曲线。

按照“偏差音”曲线，依靠人的听觉来调律是循于自然的，因为它的偏差数有纯律和五度相生律即自然律之特点，符合复合音结合的和谐度，具有线条美及和声美之特点，但这与调律仪器有一定的矛盾，人们所感觉到的这种谐和性与音仪或其他频率测定仪器所测试的精确数据却并不一致。例如，纯八度音程是纯净谐和的，其频率比为1:2，如 $a^1=440\text{Hz}$ /秒，高八度 $a^2$ 则为 $880\text{Hz}$ /秒，但是，精确地按这种倍频关系计算的数据调整音律，其结果人们听起来反而会感到高音偏低，低音偏高，很不舒服。这是由于人的音乐听觉本性与惯性，是音乐听觉所共同遵循的规律性。

实践证明，演奏者认为满意的是调律师凭听觉调准的钢琴，而不是用仪器调律的钢琴，如果再用仪器测试，就会发现它的音高，是形成一条有规律的偏离曲线，这条曲线是上章中分析过的钢琴基音“偏差音”曲线。曲线分析偏差音走向为：高音从小字二组 $c^2$ 至小字五组 $c^5$ 逐渐偏高达30音分；低音从小字组 $a$ 至大字二组 $A_2$ 逐渐偏低达40音分。

因此偏差音曲线的特点是：高音偏高，低音偏低，这是带有规律性的自然的现象。任何一个好的调律师，认真调好的钢琴，演奏家认为满意，并适合演奏，其音律自然是一条蕴涵三律的曲线。

### 三、 音色与律制

人耳判断声音的音调（即音高）主要与声音的频率有关，频率的多少决定音的高低，即振动次数越多，音愈高，反之。而音高的强弱（即音色）与声音振动频率的振幅有关，即振幅愈大，音量愈大，振幅愈小，音量愈小，音量的大小也影响音色，也就是说声音频率振幅的大小影响音色而不改变音高。

正如，不同的两个弦乐器（如小提琴和二胡）奏同一个音高a<sup>1</sup>，在它们频幅相同的情况下，奏出的基音音高与音色是基本相同的；但在它们振动频幅不同的情况下，其音色也不同。再如，钢琴的低音区与定音鼓的音色，在它们频幅相同的情况下，音色可以互为模仿。当然，这还与作品的律（即音高关系）、节奏等有关。

例如1：钢琴的低音区与其振动频幅大小相同的情况下可以模仿出鼓或管的声音，见（演示）作品：<sup>b</sup>巴托克Bartok《Out of Doors》Suite Op. 81 No I “With Drums and Pipes 鼓和管”（2个片段）：

The image contains two musical score fragments, labeled ① and ②. Both fragments are in common time (indicated by 'C').  
Fragment ① is for the bass clef (F clef) and consists of a single staff. It features a series of eighth-note heads with stems pointing in various directions, suggesting a rhythmic pattern that mimics the sound of drums or pipes.  
Fragment ② is for the treble clef (G clef) and also consists of a single staff. It features a series of eighth-note heads with stems pointing in various directions, similar to fragment ①, creating a rhythmic pattern that mimics the sound of drums or pipes.

也由于作品的律的关系，大二度和小二度的结合，所产生的频率比和音分值属无理数非整倍数关系，即大二度9/8=204cent和小二度256/243=90cent，在敲击的力度下进行，伴随着打击性的节奏，所呈现出来的基音和与其同时鸣响的泛音共同产生的音响效果。

1. 例如2：杜小甦的钢琴作品《山居秋暝》（开头），由不同律的结合，有小二度、纯四度、大二度，所产生不同的频率比和音分值结合在一起，具有丰富的音响效果，即小二度 256/243=90cent、纯四度 4/3=498 和大二度 9/8=204cent，从低音区到高音区轻奏，其产生的基音和与它们同时鸣响的泛音共同结合的音响，呈现出钢琴的另外一种音色效果，达到作曲家所要求的音乐意境。如下：

例如3：同样的原理，钢琴的中、高音区可以模仿出古筝或琵琶的音色，力度轻柔就似古筝，力度稍强就似琵琶了。如，中国钢琴作品黎英海的《夕阳箫鼓》（引子），开始先模仿鼓的轮奏，然后模仿琵琶的扫轮弹奏，紧接模仿古筝的“扫、摇、抹、拨”等奏法，描绘出“江楼钟鼓”夕阳映江面，熏风拂涟漪的景色。此曲运用不同的力度奏法，呈现出不同的音色，表现其音乐的内涵。

见中国作品黎英海的《夕阳箫鼓》（引子）：

当然，呈现不同的音响效果不但与它的物理学原理和律学有关，也与演奏者所采用的触键方式，即“向、位、力、速”的合理把握有直接的关系。由于控制钢琴的力度有很多种层次，不同的力度层次（即不同的振动频幅）表现的音色也不同，这要根据不同的作品内容而言；再如，同样一架钢琴用两种不同的力度奏同一个音，由于击键的力度、速度决定琴弦振动的频幅不同，所以两次发出的音色也有所不同：或者一个饱满、或者一个柔和（演示）。也可换句话说，基音频率决定音高，泛音的结构与音色密切相关。事实上，人耳的听觉是复杂的，人对声音音调的感觉还与声音的声压级<sup>④</sup>有关。

音调的高低，也就是我们常说的音准，由声音振动的基频频率决定的音高，称为“绝对音高”。大家在听音乐会时可以见到，演出开始前，所有的乐手都要校一下音，为的就是使整个乐队的所有乐器都使用相同的音高标准。

而在音乐戏曲等听觉艺术中，人们并不注重频率的“绝对高度”，却十分看重频率的比值，即音高间的关系，这在音乐中称为音程关系，又称之为“相对音高”。我们常听人说某人唱歌老跑调，其实就是他对音程关系掌握得不好。

乐音是由基音与泛音（谐波）组成的，泛音频率比基音频率高，一般我们常提到的是二次谐波、三次谐波与五次谐波，这种泛音列的不同即形成了各种各样的音色。在这种自然泛音列中，人们发现1、2、3、5分音（即基音与二次、三次、五次谐波）之间的关系最和谐，事实上，2与3的关系是纯五度，4与5的关系是大三度，1与2关系是八度。通过这三种音程相加减，可得到其他各律。由于它们在构成和弦时，纯净谐和，所以在合唱中常被运用，一些国家极力主张在无伴奏合唱中使用纯律，据说中世纪一些教堂的唱诗班是用纯律演唱的，只可惜我们现在无法听到这种极和谐纯净的合唱了。

但由于纯律其频率在转调时比较麻烦，不适合乐器的制造与演奏。在三种律制中，十二平均律首次解决了十二个半音的循环，使出发音循环后又回到出发音，而且所有的音距离都相等，使#c=降d，这样就使各种转调成为可能，解决了以前多种律制无法解决的移调、转调和变化音的矛盾问题，十二平均律都能应付裕如，从而对乐器的制造与演奏也提供了方便，尤其在钢琴上得到了广泛的运用。但它也有其缺点，一些音的和谐性较差，除了八度以外，所有音程都不成整倍数比例关系，严格说来，都是不协和的，存在“协和音”和“不协和音”的界限模糊不清的问题，如大小六度、三度等等，它们在构成和弦时，音律不纯，没有纯律那样谐和。因此不同律制在不同领域中的作用也各有不同。

无论是演唱还是演奏，只要涉及音准就必然要涉及到律制，不同的律制有不同的音准标准。从中外律学发展史中可以看出：因音乐听觉的需要，从“五度相生律”中解决了单声音乐的音阶构成而流传于世；到“纯律”的出现是出于多声音乐和谐感的需要；到自由转调的需要而催生出了“十二平均律”；再发展到音乐审美的需要而形成了三律合一，即“复频弹性十二平均律”，这是自古以来人们对单一律制的审美局限的革新。这些都足以说明，研究动力主要来自于音准、音的美感及音色的要求，因此，就音乐作品而言，其音响效果与律学研究的关系是非常密切而且极其重要的！把握好诸要素才能准确的诠释不同风格的音乐作品，达到专业化的演奏和真正艺术效果的审美价值。